

# Numeričko računanje konačnog dela Zomerfeldovih integrala u blizini razdvojne površi vazduha i metamaterijala negativne permitivnosti

Nikola Basta i Branko Kolundžija, *Fellow, IEEE*

**Apstrakt**—Predložen je numerički pristup rešavanju konačnog dela Zomerfeldovog integrala koji odgovara rasejanom potencijalu vertikalnog Hercovog dipola u okolini spoja dve linearne sredine – vazduha i metamaterijala negativne permitivnosti. Integral je računat duž realne putanje integracije primenom Gaus-Ležandrove kvadrature formule. U analitičkoj pripremi integrala, primenom smene promenljivih i ekstrakcije singulariteta, poništen je singularni uticaj tačaka grananja i pola podintegralne funkcije, respektivno. Predložen pristup verifikovan je numeričkim primerima i poređenjem sa drugom metodom.

**Ključne reči**—Zomerfeldovi integrali; poništavanje singulariteta; pol; tačka grananja; smena promenljivih;

## I. UVOD

ANALIZA izvora elektromagnetskog zračenja u prisustvu dve linearne sredine (eng. *half-space problem*), predstavlja klasu problema koja se istražuje već više od jednog veka [1], [2]. Rešavanje ovakvog problema počiva na tzv. Zomerfeldovim integralima (ZI) [1]. S obzirom na današnju potrebu za tačnijim i efikasnijim metodama elektromagnetske analize koje bi omogućile analizu električki velikih struktura na širokom opsegu učestanosti, ZI su i dalje aktuelni, što potvrđuju brojne publikacije poslednjih godina, kao što su [3]–[5]. Osnovni izazovi u numeričkoj proceni ZI jesu njihova oscilatornost, singularnost i polubeskonačni interval integracije [1], [2], [6]. U ovom radu, posvećujemo pažnju konačnom delu ZI [7], odnosno metodama za prevazilaženje singulariteta, tj. pola i tačaka grananja, koji se nalaze na ili blizu putanje integracije [7], [8]. Pol i tačke grananja mogu značajno uticati na tačnost numeričke integracije. Njihovo postojanje i karakter su direktno uslovljeni električnim osobinama dveju razmatranih sredina.

U dosadašnjim istraživanjima, u tipičnim scenarijima, razmatrani su tzv. desno orijentisani materijali, u kojima za ekvivalentnu permitivnost i permeabilnost važi  $\text{Re}\{\epsilon_e\} > 0$  i  $\text{Re}\{\mu_e\} > 0$ . To je slučaj i u analizi antene u vazduhu, neposredno iznad realnog zemljišta [1], [2], [6]. Međutim, u savremenim primenama, kao što je interakcija plazme ili određenih metala sa elektromagnetskim poljem visoke učestanosti, može se desiti da realni deo ekvivalentne permitivnosti postane

negativan [9], [10]. Sa druge strane, specijalni feritni materijali u kombinaciji sa metalnim strukturama ili stranim magnetskim poljem mogu se konstruisati tako da je njihova ekvivalentna permeabilnost negativna [11]–[13]. Ovi efekti su od velikog značaja za oblast fizike koja se bavi optoelektronskim komponentama, bio-senzorima, sočivima, kao i formiranjem slike (eng. *imaging*) na nanoskali [14]. Iako je za postizanje željenog efekta potreban izvor elektromagnetskog polja čija radna učestanost je bliska optičkim, specijalnim periodičnim mikrostrukturama, izrađenim od odgovarajućih elemenata, može se formirati veštački materijal kod kojeg se isti efekat postiže na učestanostima značajno nižim od optičkih, reda veličine teraherca i gigaherca [10], [14]–[18]. Takvi materijali se nazivaju *metamaterijalima* i poslednjih decenija posvećena im je velika pažnja, o čemu svedoči veliki broj publikacija [14]. U ovom radu, razmotrićemo primer materijala sa negativnom permitivnošću (ENG – eng. *ε-negative*) kao jednu od dve linearne sredine u čijoj blizini se nalazi izvor zračenja. Međutim, prikazana saznanja se odnose i na materijale sa negativnom permeabilnošću (eng. *μ-negative*) i tzv. dvostruko negativne materijale (eng. *double negative*), kod kojih je  $\text{Re}\{\epsilon_e\} < 0$  i  $\text{Re}\{\mu_e\} < 0$ .

Makroskopski gledano, postojeće modele koji opisuju zavisnost permitivnosti nekog veštačkog materijala od učestanosti (npr. Drudov ili Lorencov model [15], [19]) možemo direktno uvrstiti u Maksvelove jednačine. U scenariju sa dve linearne nemagnetske sredine, od kojih je prva vazduh, a druga ENG metamaterijal, tj. metal u kojem je za datu učestanost  $\text{Re}\{\epsilon_e\} < 0$ , u podintegralnoj funkciji ZI se pojavljuju singulariteti – tačke grananja i pol. Cilj ovog rada jeste analiza singulariteta, odnosno razvoj metode za potiskivanje njihovog uticaja radi efikasnog numeričkog računanja konačnog dela ZI s visokom tačnošću.

## II. POSTAVKA PROBLEMA

U scenariju prikazanom na sl. 1, izvor (tačka *A*) je vertikalni Hercov dipol (VHD), koji se nalazi na *z*-osi, na visini *z'* iznad ravnih koja predstavlja razdvojnu površ vazduha (sredina 1) i ENG metamaterijala (sredina 2). Na istoj visini, na horizontalnom rastojanju  $\rho$ , nalazi se tačka u kojoj posmatramo polje, *P*. Problem ćemo dalje razmatrati na primeru *reflektovanog* ZI, tj. integralnoj predstavi rasejanog potencijala VHD,

$$I_{r,zz}(0, b) = \int_0^b R_{zz}(k_\rho) J_0(\rho k_\rho) e^{-\gamma_{z0}(|z|+|z'|)} \frac{k_\rho dk_\rho}{\gamma_{z0}}, \quad (1)$$

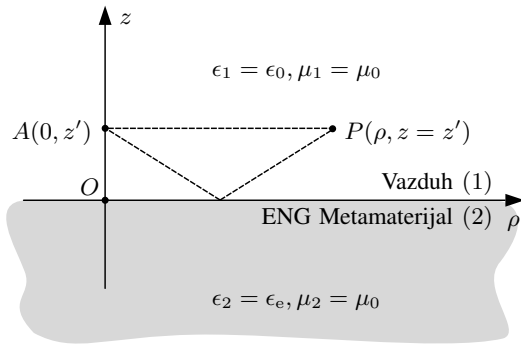
Nikola Basta is with the School of Electrical Engineering, University of Belgrade, 73 Bulevar kralja Aleksandra, 11120 Belgrade, Serbia (e-mail: nbasta@etf.rs).

Branko Kolundžija is with the School of Electrical Engineering, University of Belgrade, 73 Bulevar kralja Aleksandra, 11120 Belgrade, Serbia (e-mail: kol@etf.rs)

gde je  $R_{zz}$  generalisani koeficijent refleksije,  $J_0$  Beselova funkcija prve vrste i nultog reda,  $\gamma_{z0} = \sqrt{k_\rho^2 - k_0^2}$ ,  $k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ . U razmatranom slučaju je  $\epsilon_1 = \epsilon_0$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon_e$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ , te se generalisani koeficijent refleksije može izraziti kao

$$R_{zz}(k_\rho) = \frac{N_{R_{zz}}(k_\rho)}{D_{R_{zz}}(k_\rho)} = \frac{k^2\sqrt{k_\rho^2 - k_0^2} - k_0^2\sqrt{k_\rho^2 - k^2}}{k^2\sqrt{k_\rho^2 - k_0^2} + k_0^2\sqrt{k_\rho^2 - k^2}}, \quad (2)$$

gde  $N_{R_{zz}}$  i  $D_{R_{zz}}$  predstavljaju brojilac i imenilac,  $k = \omega\sqrt{\epsilon_e\mu_0}$ . U izrazima  $R_{zz}$  i  $\gamma_{z0}$  uočavamo tačke grananja korenih funkcija,  $k_\rho = k_0$  i  $k_\rho = k$ , koje prouzrokuju beskonačne vrednosti integranda, odnosno njegovih izvoda. Integracija se vrši po realnoj osi, a gornja granica integrala,  $b$ , je odabrana tako da je dovoljno daleko od tačaka grananja (i eventualnog pola),  $b > \max\{k_0, \text{Re}\{k\}\}$ . Napominjemo da u ovom radu razmatramo konačan deo ZI, te je  $b < +\infty$ . Od posebnog interesa je kritičan slučaj, kada su singulariteti blizu putanje integracije, tj. kada jedna od sredina ima male gubitke [7]. Iz tog razloga usvajamo za sredinu 2 metamaterijal ENG tipa, čija je ekvivalentna permitivnost  $\epsilon_e = \epsilon_0\epsilon_{er}$ , gde je  $\epsilon_{er} = -4 - j0,01$ .



Sl. 1. Scenarij sa razdvojnjom površću vazduha i ENG metamaterijala. Izvor se nalazi u tački A, a tačka posmatranja je P.

### III. POTISKIVANJE SINGULARNOG UTICAJA TAČAKA GRANANJA PRIMENOM SMENE PROMENLJIVIH

Za numeričko računanje integrala (1) sa prihvatljivom tačnošću, neohodno je potisnuti uticaj singulariteta. Singularni uticaj tačaka grananja može se potisnuti primenom smene promenljivih [7], [8]. Radi povećanja efikasnosti, pre primene smene, domen integracije možemo podeliti na poddomene, a singularne tačke grananja, odnosno njihove projekcije na realnu osu,  $k_0$  i  $k_{re} = \text{Re}\{k\}$ , predstavljaju pogodno mesto za granice novih poddomena [7]. Dodatnu granicu, koja omogućava nezavisno tretiranje dve tačke grananja, definišemo kao aritmetičku sredinu dveju prvobitnih granica, kao što je prikazano na sl. 2. Na taj način imamo četiri poddomena, a time i četiri određena integrala, čije vrednosti treba proceniti. Sledi da ZI nad konačnim intervalom možemo izraziti kao  $I_{r,zz}(0, b) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ , gde je

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{r,zz}(0, k_{re}), & I_2 &= I_{r,zz}\left(k_{re}, \frac{k_0 + k_{re}}{2}\right), \\ I_3 &= I_{r,zz}\left(\frac{k_0 + k_{re}}{2}, k_0\right), & I_4 &= I_{r,zz}(k_0, b), \end{aligned} \quad (3)$$

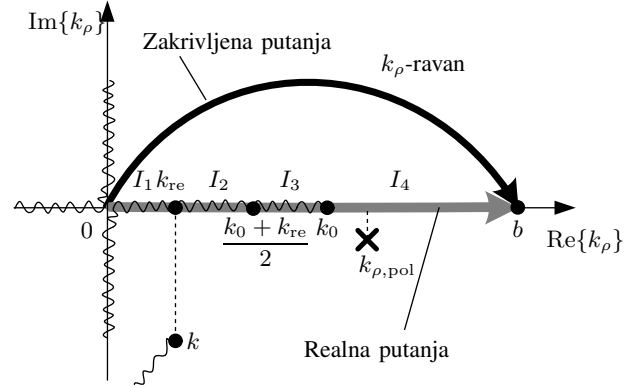
a gornja granica iznosi  $b = k_0\sqrt{2}$  [7], [20].

Radi transformacije integrala u oblik pogodniji za numeričko računanje, definišemo smene promenljivih [7],

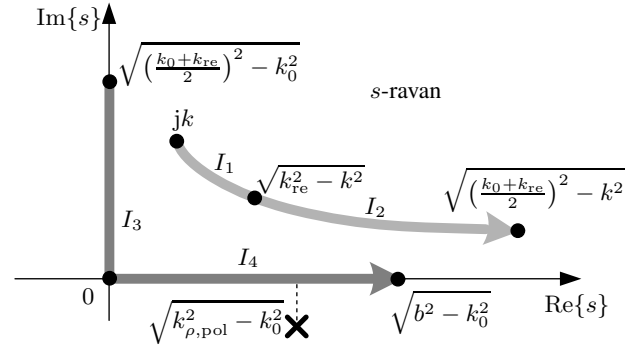
$$s = \sqrt{k_\rho^2 - k^2} \Rightarrow k_\rho = \sqrt{s^2 + k^2}, \quad \text{za } I_1 \text{ i } I_2, \quad (4)$$

$$s = \sqrt{k_\rho^2 - k_0^2} \Rightarrow k_\rho = \sqrt{s^2 + k_0^2}, \quad \text{za } I_3 \text{ i } I_4, \quad (5)$$

gde za obe smene važi  $k_\rho dk_\rho = s ds$ . Na ovaj način, potiskuje se singularni uticaj tačaka grananja, kao što će biti pokazano u odeljku V. Putanje integracije nakon smene prikazane su u kompleksnoj  $s$ -ravni na sl. 3.



Sl. 2. Prikaz realne putanje (siva linija) i zakrivljene putanje (crna linija) u kompleksnoj  $k_\rho$ -ravni za  $\text{Re}\{\epsilon_{er}\} < 0$  i  $\text{Im}\{\epsilon_{er}\} < 0$ . Projekcije talasnih brojeva na realnu osu i njihova aritmetička sredina predstavljaju granice poddomena. Usled negativnog realnog dela permitivnosti, pol se pojavljuje u blizini realne ose sa kritične desne strane u odnosu na  $k_0$ .



Sl. 3. Putanje integracije (sive linije) i singulariteti predstavljani u preslikanoj, kompleksnoj  $s$ -ravni.

### IV. EKSTRAKCIJA POLA PODINTEGRALNE FUNKCIJE

Na spoju vazduha i ENG metamaterijala, može se javiti posebna vrsta talasa u vidu površinskog plazmon-polaritona (SPP - eng. *surface plasmon polariton*). Fenomen SPP nastaje usled sprege oscilatornog EM polja i slobodnih nosilaca u metalu. Uslov za njegovo pojavljivanje na razdvojnoj površi sredina 1 i 2 glasi [14]

$$\text{Re}\{\epsilon_{e1}\} \text{Re}\{\epsilon_{e2}\} < 0, \quad \text{Re}\{\epsilon_{e1}\} + \text{Re}\{\epsilon_{e2}\} < 0, \quad (6)$$

gde je, u odnosu na [14], ovde iskaz uslova uopšten i izražen preko realnih delova ekvivalentnih permitivnosti, kako bi se u

račun uključio i slučaj sa gubicima. Za slučaj malih gubitaka, koji je u ovom radu razmatran, SPP se u literaturi naziva i Fanoov mod [3]. Pojava tzv. površinskog talasa je direktno povezana sa položajem pola podintegralne funkcije u kompleksnoj ravni (videti Dodatak). Pol u slučaju našeg integranda predstavlja nulu imenioca generalisanog koeficijenta refleksije. Rešavanjem jednačine

$$D_{Rzz}(k_\rho) = k^2 \sqrt{k_\rho^2 - k_0^2} + k_0^2 \sqrt{k_\rho^2 - k^2} = 0, \quad (7)$$

dobija se  $k_\rho = \pm k_{\rho, \text{pol}}$ , gde je

$$k_{\rho, \text{pol}} = \sqrt{\frac{k_0^2 k^2}{k_0^2 + k^2}} = k_0 \sqrt{\frac{\epsilon_{\text{er}}}{1 + \epsilon_{\text{er}}}}. \quad (8)$$

Za odabrano  $\epsilon_{\text{er}}$ , rešenje jednačine  $D_{Rzz} = 0$ , dato izrazom (8), iznosi  $k_{\rho, \text{pol}} \approx k_0(1,1547 - j0,0005)$ . Ovaj broj se nalazi u IV kvadrantu kompleksne  $k_\rho$ -ravni (pozitivan predznak rešenja jednačine  $D_{Rzz} = 0$ ), *desno* od tačke grananja  $k_0$  u neposrednoj blizini realne ose, odnosno realne putanje integracije (sl. 2). Takav pol nepovoljno utiče na tačnost i konvergenciju numeričkog računanja integrala i povezuje se sa pojavom površinskog talasa SSP tipa (videti Dodatak).

Primenom smene, pol se u kompleksnoj  $s$ -ravni preslikava u  $s_{\text{pol}} = \sqrt{k_{\rho, \text{pol}}^2 - k_0^2} \approx k_0(0,5773 - j0,0010)$ , što je takođe u IV kvadrantu i blizu realne ose. Kako u  $s$ -ravni domen integracije integrala  $I_4$  ide duž realne ose (sl. 3), zaključujemo da i u domenu nove promenljive, preslikani pol ugrožava tačnost i konvergenciju integrala. Korišćenjem tehnike ekstrakcije singulariteta, oduzimanjem i dodavanjem pogodnog singularnog izraza, čiji integral je analitički rešiv [21], [22], integral  $I_{r,zz}$  se nakon primenjene smene može izraziti u obliku

$$\begin{aligned} I_{r,zz} &= \int_{s_1}^{s_2} f_{r,zz}(s) ds \\ &= \int_{s_1}^{s_2} \left( f_{r,zz}(s) - \frac{R_{\text{pol}}}{s - s_{\text{pol}}} \right) ds + I_{\text{Res}}, \quad (9) \end{aligned}$$

gde je  $f_{r,zz}(s)$  podintegralna funkcija integrala  $I_{r,zz}$  nakon smene, a  $R_{\text{pol}}$  njen ostatak u tački  $s = s_{\text{pol}}$ ,

$$R_{\text{pol}} = \text{Res}_{s=s_{\text{pol}}} f_{r,zz}(s) = \lim_{s \rightarrow s_{\text{pol}}} (s - s_{\text{pol}}) f_{r,zz}(s). \quad (10)$$

Veličina  $I_{\text{Res}}$  se računa analitički integraljenjem oduzetog izraza

$$\begin{aligned} I_{\text{Res}} &= \int_{s_1}^{s_2} \frac{R_{\text{pol}}}{s - s_{\text{pol}}} ds = R_{\text{pol}} \left[ \ln \left| \frac{s_1 - s_{\text{pol}}}{s_2 - s_{\text{pol}}} \right| \right. \\ &\quad \left. + j(\arg\{s_2 - s_{\text{pol}}\} - \arg\{s_1 - s_{\text{pol}}\}) \right]. \quad (11) \end{aligned}$$

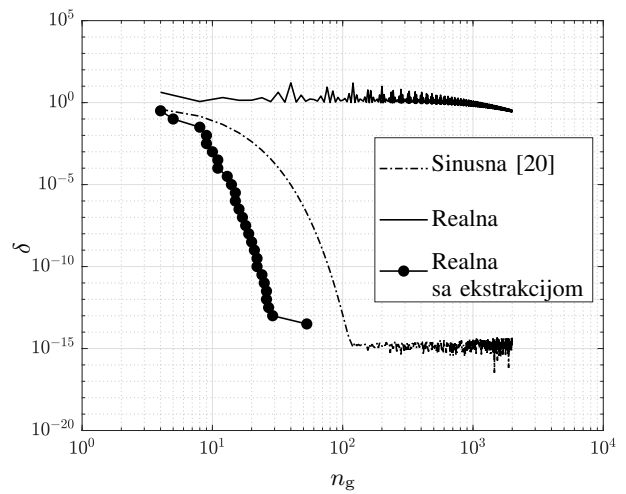
Ovakvom analitičkom pripremom, uticaj pola podintegralne funkcije je potisnut i možemo pristupiti numeričkoj integraciji.

## V. NUMERIČKI PRIMERI

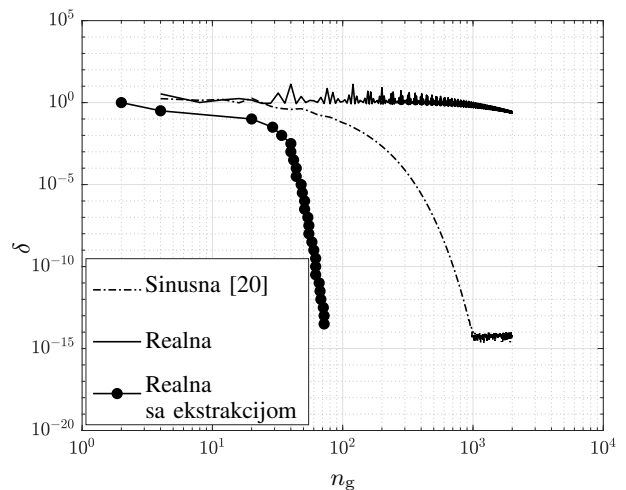
Radi provere efikasnosti smene promenljivih i ekstrakcije pola u sadejstvu, posmatran integral  $I_{r,zz}$  je razmatran za  $z = z' = 0$  i  $\rho/\lambda_0 \in \{1, 10, 100\}$ . Ovaj skup slučajeva je odabran,

jer se nultim vertikalnim rastojanjem ukida prigušenje anvelope usled eksponencijalnog faktora u podintegralnoj funkciji, te je otklonjena mogućnost da se dejstvo pola potre malim vrednostima funkcije prouzrokovanih prigušenjem. Takođe, bliskost izvora zračenja razdvojnoj površi odgovara velikom broju primera iz prakse, kao što su radio i geo-radarski predajnici neposredno iznad zemlje.

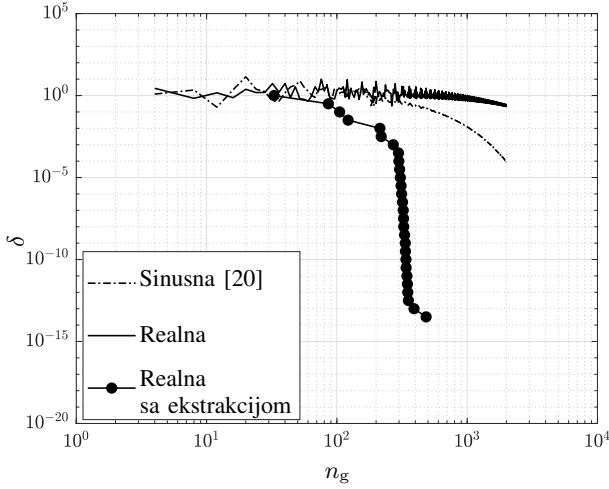
Za date slučajeve, relativna greška u funkciji potrebnog broja integracionih tačaka  $n_g$ , prikazana je na sl. 4–6. Integral je računat na tri načina - duž sinusne zakrivljene putanje (sl. 2) i duž realne putanje sa i bez ekstrakcije pola. Referentna zakrivljena putanja sinusnog oblika je zadata prema [20], gde je istaknuta zavisnost visine putanje od horizontalnog rastojanja  $\rho$ . Ovakva adaptivna putanja se pokazala superiornom u pogledu tačnosti u odnosu na ostale kanonične putanje iz literature koje su definisane fiksnim parametrima.



Sl. 4. Poređenje relativne greške računanja integrala  $I_{r,zz}$  pomoću sinusne putanje [20], realne putanje bez ekstrakcije pola i realne putanje sa ekstrakcijom pola za  $\rho = \lambda_0$  i  $z = z' = 0$ .



Sl. 5. Poređenje relativne greške računanja integrala  $I_{r,zz}$  pomoću sinusne putanje [20], realne putanje bez ekstrakcije pola i realne putanje sa ekstrakcijom pola za  $\rho = 10\lambda_0$  i  $z = z' = 0$ .



Sl. 6. Poređenje relativne greške računanja integrala  $I_{r,zz}$  pomoću sinusne putanje [20], realne putanje bez ekstrakcije pola i realne putanje sa ekstrakcijom pola za  $\rho = 100\lambda_0$  i  $z = z' = 0$ .

Posmatrajući krivu greške za realnu putanju kada je primenjena samo smena promenljivih, vidimo da je pol dovoljno blizu putanje integracije, te prouzrokuje grešku reda veličine  $\delta \sim 0,1 \div 10$ . Smena promenljivih u kombinaciji sa ekstrakcijom uspešno potiskuje dejstva tačaka grananja i pola, pa je dostignuta tačnost visoka. Integracija zakrivljenom sinusnom putanjom rezultuje nivoima greške koji su prihvatljivi za malo  $\rho$ , te se može pretpostaviti da je sinusna putanja dovoljno udaljena od pola. Međutim, dejstvo singularne tačke grananja  $k_\rho = k_0$ , a time i velikih vrednosti Beselove funkcije kompleksnog argumenta u I kvadrantu, je i dalje vidljivo. Osetljivost integracije duž zakrivljene putanje dolazi do izražaja naročito za veće  $\rho$  (sl. 6). S obzirom na veću robusnost sa aspekta horizontalnog rastojanja i lakoću implementacije ekstrakcije pola, u datom scenariju se predložena metoda sa korenim smenom promenljivih i realnom putanjom pokazuje kao pogodniji pristup.

## VI. ZAKLJUČAK

Realna putanja integracije i Gaus-Ležandrova kvadratura formula primenjeni su u numeričkom računanju Zomerfeldovog integrala za rasejani potencijal vertikalnog Hercovog dipola na spoju vazduha i metamaterijala negativne permitivnosti. Singularni uticaj tačaka grananja potisnut je primenom smene promenljivih, dok je pol uklonjen primenom tehnike ekstrakcije singulariteta nakon uvrščivanja smene. Na ovaj način omogućeno je efikasno računanje integrala sa visokom tačnošću. U poređenju sa metodama sa zakrivljenom putanjom integracije, predloženi pristup omogućava višu tačnost u širokom opsegu horizontalnih rastojanja izvora i tačke posmatranja.

## DODATAK

U zavisnosti od osobina dve linearne sredine, na njihovoj razdvojnoj površi može doći do pojave nekog od različitih oblika površinskog elektromagnetskog talasa, koji u manjoj

ili većoj meri doprinosi ukupnom talasu. Pojava površinskog talasa je usko povezana sa polovima podintegralne funkcije Zomerfeldovog integrala pomoću kojeg izražavamo EM polje. U ovom dodatku, na primeru reflektovanog Zomerfeldovih integrala, analiziraćemo uslov za postojanje polova i njihov singularni uticaj na numeričko računanje integrala.

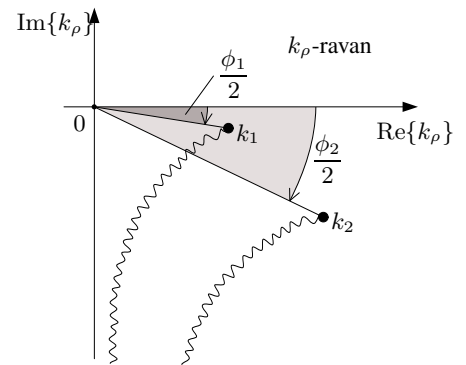
Izjednačimo sa nulom imenilac generalisanog koeficijenta refleksije za vertikalni Hercov dipol na razdvojnoj površi dve linearne nemagnetske sredine ( $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ ),

$$D_{Rzz} = k_2^2 \sqrt{k_\rho^2 - k_1^2} + k_1^2 \sqrt{k_\rho^2 - k_2^2} = 0, \quad (12)$$

gde su  $k_1$  i  $k_2$  talasni brojevi prve i druge sredine. Tada kažemo da je ispunjen tzv. uslov rezonancije. Pravolinijskim rešavanjem jednačine (12), prebacivanjem na drugu stranu jednakosti, kvadriranjem i određivanjem rešenja po  $k_\rho$ , dobijamo izraz za pol<sup>1</sup>

$$k_\rho = \pm k_{\rho,\text{pol}}, \quad k_{\rho,\text{pol}} = \sqrt{\frac{k_1^2 k_2^2}{k_1^2 + k_2^2}}. \quad (13)$$

Međutim, kako se kvadriranjem gubi informacija o izboru grana u korenim funkcijama, nije jasno pod kojim uslovima takvo rešenje jednačine zaista postoji i u kakvoj su svezi ti uslovi sa svojstvima dveju sredina. Da bismo to razjasnili, pomenutu jednačinu rešićemo postupno, sa osvrtom na izbor grana. Radi jednostavnosti, razmatraćemo slučaj kada su  $k_1$  i  $k_2$  u IV kvadrantu  $k_\rho$ -ravni, što odgovara tipičnim sredinama sa gubicima. Neka su argumenti kompleksnih veličina  $k_1^2$  i  $k_2^2$  dati uglovima  $\phi_1$  i  $\phi_2$ , ( $|\phi_2| > |\phi_1|$ ), respektivno, i neka je  $\arg\{k_1^2 + k_2^2\} = \phi$ , kao na sl. 7. Zaseci su prikazani talasastim linijama, a njihov oblik odgovara hiperbolama, definisanim jednačinama  $\text{Im}\{k_{z1,2}\} = 0$ , gde je  $k_{z1,2} = \sqrt{k_{1,2}^2 - k_\rho^2}$  talasni broj u pravcu  $z$ -ose. Ovakav odabir zaseka korišćen je u originalnom Zomerfeldovom radu [1]. Imenilac u okolini



Sl. 7. Tačke grananja i zaseci podintegralne funkcije za slučaj dve sredine sa gubicima, čiji talasni brojevi su  $k_1$  i  $k_2$ . Talasaste linije predstavljaju zaseke odgovarajućih korenih funkcija.

<sup>1</sup>Ovaj izraz jeste pol kada je  $\text{Im}\{k_{z1}\} < 0$  i  $\text{Im}\{k_{z2}\} < 0$ , što odgovara prvoj, regularnoj grani funkcija  $k_{z1}$  i  $k_{z2}$ . Drugaćijim odabirom grana, dati izraz postaje nula brojioca. Ovo se postiže u tzv. neregularnoj grani, odnosno neregularnom listu Rimanove površi (eng. *improper Riemann sheet*), i tada se dati izraz zove *Brusterova nula* [23], [24].

pola postaje

$$\begin{aligned}
D_{Rzz}(k_{\rho,\text{pol}}) &= k_2^2 \sqrt{k_{\rho,\text{pol}}^2 - k_1^2} + k_1^2 \sqrt{k_{\rho,\text{pol}}^2 - k_2^2} \\
&= k_2^2 \sqrt{\frac{-k_1^4}{k_1^2 + k_2^2}} + k_1^2 \sqrt{\frac{-k_2^4}{k_1^2 + k_2^2}} \\
&= |k_2|^2 e^{j\phi_2} \frac{|k_1|^2}{\sqrt{|k_1^2 + k_2^2|}} \sqrt{e^{j(\pi+2\phi_1-\phi)}} \\
&\quad + |k_1|^2 e^{j\phi_1} \frac{|k_2|^2}{\sqrt{|k_1^2 + k_2^2|}} \sqrt{e^{j(\pi+2\phi_2-\phi)}}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Da bi izraz (14) bio jednak nuli, potrebno je da dva sabirka nakon korenovanja eksponencijalnih faktora dobiju suprotne predznake. To je moguće samo ako podkorene veličine  $e^{j(\pi+2\phi_1-\phi)}$  i  $e^{j(\pi+2\phi_2-\phi)}$  imaju imaginarnu delove suprotnih predznaka, tj. ako je

$$(2\phi_1 - \phi)(2\phi_2 - \phi) < 0. \tag{15}$$

Drugim rečima, opseg ugla  $\phi$  je određen sa  $2|\phi_1| < |\phi| < 2|\phi_2|$ , odakle sledi potreban uslov za postojanje pola

$$|\phi_2| > 2|\phi_1|. \tag{16}$$

Iako je ovaj uslov često ispunjen u praksi, samo postojanje pola ne znači nužno i da on utiče na numeričku integraciju. Pokazuje se da uticaj pola, pored njegove udaljenosti od putanje integracije, zavisi i od njegovog relativnog položaja u odnosu na tačke grananja, što ćemo ilustrovati primerom.

Rešenje za pol integranda možemo izraziti na sledeći način:

$$k_{\rho,\text{pol}} = k_1 \sqrt{\frac{\kappa}{1 + \kappa}}, \quad \kappa = \frac{k_2^2}{k_1^2}. \tag{17}$$

Neka je, za svrhe našeg primera, sredina 1 bez gubitaka,  $\text{Re}\{k_1\} > 0 \wedge \text{Im}\{k_1\} = 0$ , a sredina 2 sa gubicima,  $\text{Im}\{k_2\} < 0$ . Tada se hiperbolični zasek koji odgovara tački grananja  $k_1$  (sl. 7) deformiše u dva pravolinijska segmenta, kao na sl. 8. Ako definišemo uglove  $\alpha$  i  $\beta$

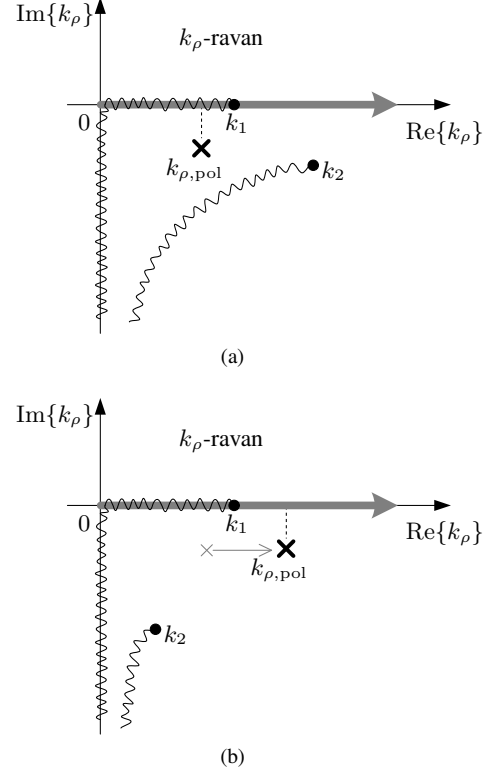
$$\begin{aligned}
\kappa &= |\kappa| e^{j\alpha}, \quad -\pi < \alpha < 0, \\
1 + \kappa &= |1 + \kappa| e^{j\beta}, \quad \alpha < \beta < 0,
\end{aligned} \tag{18}$$

sledi da je [3], [25]

$$k_{\rho,\text{pol}} = k_1 \sqrt{\frac{|\kappa|}{|1 + \kappa|}} e^{j\frac{\alpha-\beta}{2}}. \tag{19}$$

Posmatrajmo najpre slučaj kada je  $\text{Re}\{\kappa\} > 0$ . Tada je  $-\pi/2 < \alpha < 0$  i pol se nalazi u IV kvadrantu, *levo* od  $k_1$ , tj.  $\text{Re}\{k_{\rho,\text{pol}}\} < \text{Re}\{k_1\}$ . Ukoliko usvojimo putanju integracije duž realne ose i pretpostavimo male gubitke u sredini 2, čini se da bi blizina pola putanji integracije mogla značajno umanjiti tačnost rezultata usled velikih vrednosti integranda (sl. 8a). Međutim, s obzirom da se realna putanja integracije nalazi u prvoj, regularnoj grani funkcije  $k_{z1}$  (eng. *proper Riemann sheet*), neposredno iznad zaseka, a da se pol nalazi ispod njega, izbegnut je njegov singularni efekat. To se objašnjava time da se putanja integracije i pol ne nalaze istovremeno u zoni gde je potiranje sabiraka imenioca (14) moguće. Ako je pak  $\text{Re}\{\kappa\} < 0$ , tj.  $-\pi < \alpha < -\pi/2$  (npr. plazma, metamaterijali i određeni metali na visokim učestanostima),

onda se pol nalazi *desno* od tačke grananja  $k_1$ , i to u zoni gde svojom blizinom realnoj osi može prouzrokovati velike vrednosti integranda na putanji integracije, a time i umanjeње tačnosti numeričkog računanja integrala. Pojava pola desno od tačke grananja povezuje se sa pojavim jedne vrste površinskog talasa, kojeg nazivamo površinski plazmon-polariton (SPP - eng. *surface plasmon polariton*) [3], [24], [25].

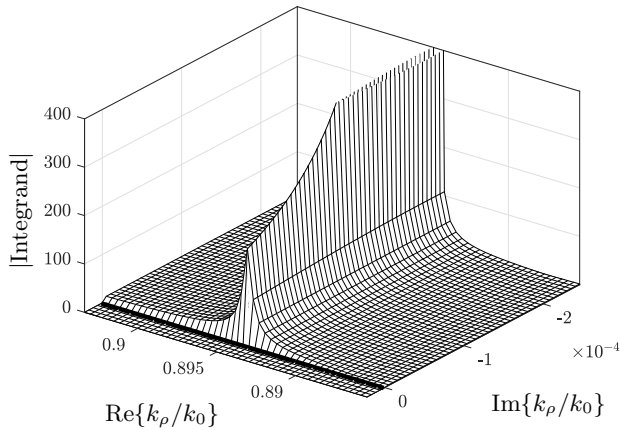


Sl. 8. Relativni položaj pola u odnosu na tačke grananja kada je sredina 2 (a) dielektrik s gubicima i (b) metamaterijal sa  $\text{Re}\{k_2^2\} < 0$ .

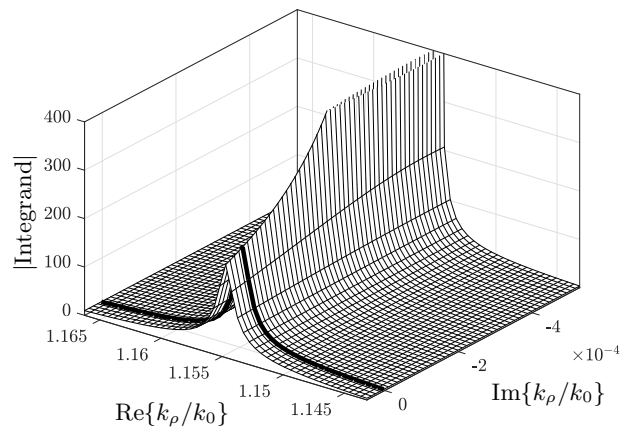
Na sl. 9 prikazan je grafik modula integranda ZI za rasejani potencijal vertikalnog Hercovog dipola u funkciji  $k_{\rho}$ , kada je  $\rho = 10\lambda_0$  i  $z = z' = 0$ . Crna linija predstavlja grafik modula integranda duž realne ose. U datom primeru je  $k_1 = k_0$  i  $k_2 = k_0 \sqrt{\epsilon_{\text{er}}}$ , odnosno  $\kappa = \epsilon_{\text{er}}$ . U prvom slučaju, prikazanom na sl. 8a, efektivna relativna permitivnost je  $\epsilon_{\text{er}} = 4 - j0,01$ , dok je pol  $k_{\rho,\text{pol}} \approx k_0(0,8944 - j0,0002)$ . Kako je  $\text{Re}\{\epsilon_{\text{er}}\} > 0$ , pol je *zaklonjen* zasekom, te ne stvara ekstremne vrednosti, odnosno jake promene u podintegralnoj funkciji. U drugom slučaju je  $\epsilon_{\text{er}} = -4 - j0,01$ , a pol, čija vrednost sada iznosi  $k_{\rho,\text{pol}} \approx k_0(1,1547 - j0,0005)$ , nije više *zaklonjen*, te stvara jak ekstremum na putanji integracije.

## LITERATURA

- [1] A. N. Sommerfeld, "Über die Ausbreitung der Wellen in der Drahtlosen Telegraphie," *Ann. Physik*, vol. 28, pp. 665–736, 1909.
- [2] H. Weyl, "Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über einem ebenen Leiter," *Ann. Physik*, vol. 60, pp. 481–500, 1919.
- [3] K. Michalski and J. Mosig, "The Sommerfeld half-space problem revisited: from radio frequencies and zenneck waves to visible light and fano modes," *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 30, no. 1, pp. 1–42, 2016.
- [4] K. A. Michalski and J. R. Mosig, "Efficient computation of Sommerfeld integral tails – methods and algorithms," *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 30, pp. 281–317, Mar. 2016.



(a)



(b)

Sl. 9. Prikaz modula integranda ZI za rasejani potencijal vertikalnog Hercovog dipola nad kompleksnom  $k_\rho$ -ravni, kada je  $\rho = 10\lambda_0$  i  $z = z' = 0$ . Grafik je zasečen u okolini pola, a maksimalna prikazana vrednost je ograničena na 400, radi boljeg prikaza. Crna linija predstavlja grafik modula integranda duž realne putanje integracije. (a)  $\epsilon_{er} = 4 - j0,01$ , pol je zaklonjen zasekom i ne utiče na integrand; (b)  $\epsilon_{er} = -4 - j0,01$ , pol nije zaklonjen zasekom i stvara ekstremum;

- [5] R. Trembinski and D. A. McNamara, "The engineering modelling of electromagnetic wave scattering from sea ice by surface-based radar," in *Proc. 2018 IEEE Int. Symp. Ant. Prop. (APS/URSI)*, Boston, MA, July 2018.
- [6] V. Petrović, *Analiza žičanih antena u prisustvu realnog zemljišta metodom likova*, doktorska disertacija, Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 1993.
- [7] N. Basta and B. Kolundžija, "Efficient evaluation of the finite part of pole-free Sommerfeld integrals in half-space problems with predefined accuracy," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 67, no. 7, pp. 4930–4935, 2019.
- [8] N. Basta and B. Kolundžija, "On efficient evaluation of pole-free Sommerfeld integrals," in *Proc. 2019 Int. Conf. on Electrical, Electronic and Computing Engineering (IcETRAN)*, Srebrno jezero, June 2019.
- [9] J. A. Bittencourt, *Fundamentals of Plasma Physics*. New York: Springer-Verlag, 2004.

- [10] W. Rotman, "Plasma simulation by artificial dielectrics and parallel-plate media," *IRE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 10, no. 1, pp. 82–95, 1962.
- [11] G. Dewar, "A thin wire array and magnetic host structure with  $n < 1$ ," *Journal of Applied Physics*, vol. 97, no. 10, p. 10Q101, 2005.
- [12] F. J. Rachford, D. N. Armstead, V. G. Harris, and C. Vittoria, "Simulations of ferrite-dielectric-wire composite negative index materials," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 99, p. 057202, July 2007.
- [13] Y. Huang, G. Wen, Y. Yang, and K. Xie, "Simulations of ferrite-dielectric-wire composite negative index materials," *Appl. Phys. A*, vol. 106, p. 79–86, 2012.
- [14] L. Solymar and E. Shamonina, *Waves in Metamaterials*. New York: Oxford University Press, 2009.
- [15] J. B. Pendry, A. J. Holden, W. J. Stewart, and I. Youngs, "Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 76, pp. 4773–4776, Jun 1996.
- [16] J. B. Pendry, "Negative refraction makes a perfect lens," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, pp. 3966–3969, Oct. 2000.
- [17] D. Gérard and S. K. Gray, "Aluminium plasmonics," *Journal of Physics D: Applied Physics*, vol. 48, p. 184001, dec 2014.
- [18] Y. Li, *Plasmonic Optics: Theory and Applications*. Bellingham: SPIE Press, 2017.
- [19] R. W. Ziolkowski and E. Heyman, "Wave propagation in media having negative permittivity and permeability," *Physical Review E: Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, vol. 64, p. 056625, Oct 2001.
- [20] R. Golubovic, A. G. Polimeridis, and J. R. Mosig, "Efficient algorithms for computing Sommerfeld integral tails," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 60, pp. 2409–2417, May 2012.
- [21] J. R. Mosig and T. K. Sarkar, "Comparison of quasi-static and exact electromagnetic fields from a horizontal electric dipole above a lossy dielectric backed by an imperfect ground plane," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 34, pp. 379–387, Apr. 1986.
- [22] J. R. Mosig, "Integral equation technique," in *Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-wave Passive Structures* (T. Itoh, ed.), New York: Wiley, 1989.
- [23] A. Ishimaru, J. R. Thomas, and S. Jaruwatanadilok, "Electromagnetic waves over half-space metamaterials of arbitrary permittivity and permeability," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 53, no. 3, pp. 915–921, 2005.
- [24] A. Ishimaru, *Waves in Inhomogeneous and Layered Media*, ch. 3, pp. 7–34. John Wiley and Sons, 2017.
- [25] K. A. Michalski and J. R. Mosig, "On the surface fields excited by a hertzian dipole over a layered halfspace: From radio to optical wavelengths," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 63, no. 12, pp. 5741–5752, 2015.

## ABSTRACT

A numerical approach to computation of the final part of the reflected-potential Sommerfeld integral is proposed for the case of interface of air and negative-permittivity metamaterial. The integral is computed along the real-axis integration path, using Gauss-Legendre quadrature formula. In the analytical preparation of the integral, singular effects of branch-point singularities and pole are canceled by means of change of variables and singularity extraction technique, respectively. The proposed approach is verified through numerical examples and comparison to another method.

## Numerical computation of the finite part of Sommerfeld integrals in the vicinity of interface of air and negative-permittivity metamaterial

Nikola Basta and Branko Kolundžija