

# Uticaj izbora početnog trenutka konverzije na procenu efektivne vrednosti signala

Marina Subotin, Dragan Pejić, Stefan Mirković, Nemanja Gazivoda, Marjan Urekar i Bojan Vujičić

**Apstrakt**— U ovom radu je istražen kvalitet izračunavanja procene efektivne vrednosti napona primenom pravougaonog, trapeznog, prvog i drugog modifikovanog Simpsonovog pravila u zavisnosti od izbora periode. Uvođenjem modifikacija kod Simpsonovih pravila je prevaziđen zahtev u pogledu broja tačaka nad kojima se vrši numerička analiza. U istraživanju je obuhvaćen sažet teorijski pristup izračunavanju procene efektivne vrednosti napona pomoću ovih metoda i sprovedena je simulaciona analiza. Pokazano je da procena efektivne vrednosti napona i njena merna nesigurnost zavise od izbora periode. Za svaku od metoda je ustanovljen najpogodniji izbor periode u cilju poboljšanja mernih performansi.

**Ključne reči:** efektivna vrednost; numerička integracija; pravilo pravougaonika; pravilo trapeza; modifikovano Simpsonovo 1/3 pravilo; modifikovano Simpsonovo 3/8 pravilo;

## I. UVOD

Digitalni instrumenti koriste A/D konvertore radi prevođenja vrednosti analogne veličine u digitalan zapis. Kako se posle A/D konverzije više ne raspolaže analitičkim zapisom zavisnosti signala od vremena, nego samo odbircima te funkcije u ekvidistantno raspoređenim trenucima dobijenih u procesu odmeravanja, neophodno je primeniti numeričke metode kako bi dobili procenu efektivne vrednosti signala.

Klasična rešenja numeričke integracije koja susrećemo u praksi jesu pravilo pravougaonika i pravilo trapeza. Pored standardnih, prikazane su i modifikovane verzije postojećih metoda numeričke integracije koje se u praksi retko susreću zbog njihove ograničene primene. Ove unapređene metode su univerzalne i ne zahtevaju dodatno investiranje u resurse hardvera. One omogućavaju poboljšanje performansi postojećeg uređaja direktnim izmenama u samom firmveru za procenu efektivne vrednosti signala.

## II. NUMERIČKE METODE

Efektivna vrednost periodičnog napona sa periodom  $T$  primenom analogne elektronike određuje se pomoću izraza (1).

Marina Subotin – Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 6, 21000 Novi Sad, Srbija (e-mail: [marina.bulat@uns.ac.rs](mailto:marina.bulat@uns.ac.rs)).

Dragan Pejić – Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 6, 21000 Novi Sad, Srbija (e-mail: [pejicdra@uns.ac.rs](mailto:pejicdra@uns.ac.rs)).

Stefan Mirković – Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 6, 21000 Novi Sad, Srbija (e-mail: [mirkovicst@uns.ac.rs](mailto:mirkovicst@uns.ac.rs)).

Nemanja Gazivoda – Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 6, 21000 Novi Sad, Srbija (e-mail: [manjagazivoda@uns.ac.rs](mailto:manjagazivoda@uns.ac.rs)).

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} \quad (1)$$

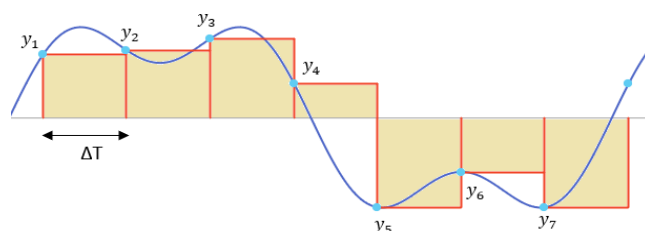
Posle analogno-digitalne konverzije, analogni napon je preveden u skup diskretnih vrednosti, što zahteva da se prilagodi izraz (1). Ovo prilagođavanje se vrši putem numeričke integracije različitim metodama na osnovu odbiraka koje dobijamo u procesu odmeravanja.

### A. Pravilo pravougaonika

Pravilo pravougaonika predstavlja postupak numeričke integracije koji koristi konstantnu funkciju za procenu date veličine između svaka dva susedna odbiraka. Geometrijska interpretacija ove metode je površina pravougaonika.

Na slici 1 je prikazana ilustracija pravila pravougaonika. Posmatran je složenoperiodičan signal koji je reprezentativan uzorak realnog signala, a odabiran je u  $n=7$  tačaka, čija perioda je određena uzastopnim prolaskom rastućeg napona kroz nultu vrednost. Kako je primer realnog signala koji se susreće u praksi, ovakav signal je korišćen u čitavom radu u svrhu prikaza primene numeričkih metoda.

Aproksimirane vrednosti određenog integrala  $P$  i efektivne vrednosti napona  $U_{eff}$  nad datom periodom su predstavljeni u izrazima (2) i (3), respektivno.



Sl. 1. Pravilo pravougaonika

$$P \approx \Delta T (y_1 + y_2 + \dots + y_n) = \Delta T \sum_{i=1}^n y_i \quad (2)$$

Marjan Urekar – Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 6, 21000 Novi Sad, Srbija (e-mail: [urekarm@uns.ac.rs](mailto:urekarm@uns.ac.rs)).

Bojan Vujičić – Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 6, 21000 Novi Sad, Srbija (e-mail: [bojanvuj@uns.ac.rs](mailto:bojanvuj@uns.ac.rs)).

$$U_{eff} \approx \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u^2(i\Delta T)} = \sqrt{\frac{1}{n} [1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1]} \cdot \underline{U} \quad (3)$$

gde je

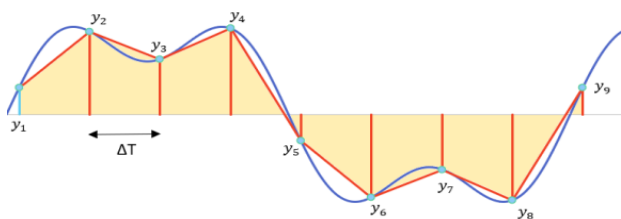
$$\underline{U} = [u^2(\Delta T) \ u^2(2\Delta T) \ \dots \ u^2((n-1)\Delta T) \ u^2(n\Delta T)]^T.$$

U izrazu (3),  $\underline{U}$  je vektor od  $n$  elemenata koji predstavljaju kvadrate nad odbircima dobijenim u okviru periode. Oznaka  $\underline{U}$  omogućava jednostavniji, praktičniji i razumljiviji prikaz izraza u ovom radu.

### B. Pravilo trapeza

Ova metoda predstavlja postupak numeričke integracije koji pomoću linearne funkcije daje aproksimaciju vrednosti između svaka dva susedna odbirka, a njena geometrijska interpretacija je površina pravouglog trapeza. Na slici 2 je prikazana ilustracija pravila. U okviru intervala integracije dobijeno je osam odbiraka, što rezultuje procenom vrednosti određenog integrala koja je manja od stvarne. Stoga je neophodno uzeti i naredni odbirak čija je vrednost bliska vrednosti prvog odbirka, te je ukupan broj odbiraka koje uzimamo u razmatranje  $n = 9$ .

Estimirane vrednosti određenog integrala  $P$  i efektivne vrednosti napona  $U_{eff}$  nad datom periodom nalaze su u izrazima (4) i (5), respektivno.



Sl. 2. Pravilo trapeza

$$P \approx \Delta T \left( \frac{y_1 + y_n}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} y_i \right) \quad (4)$$

$$U_{eff} \approx \sqrt{\frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=2}^{n-1} u_i^2 + \frac{u_1^2 + u_n^2}{2} \right)} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left[ \frac{1}{2} \ 1 \ \dots \ 1 \ \frac{1}{2} \right]} \cdot \underline{U} \quad (5)$$

### C. Modifikovano Simpsonovo 1/3 pravilo

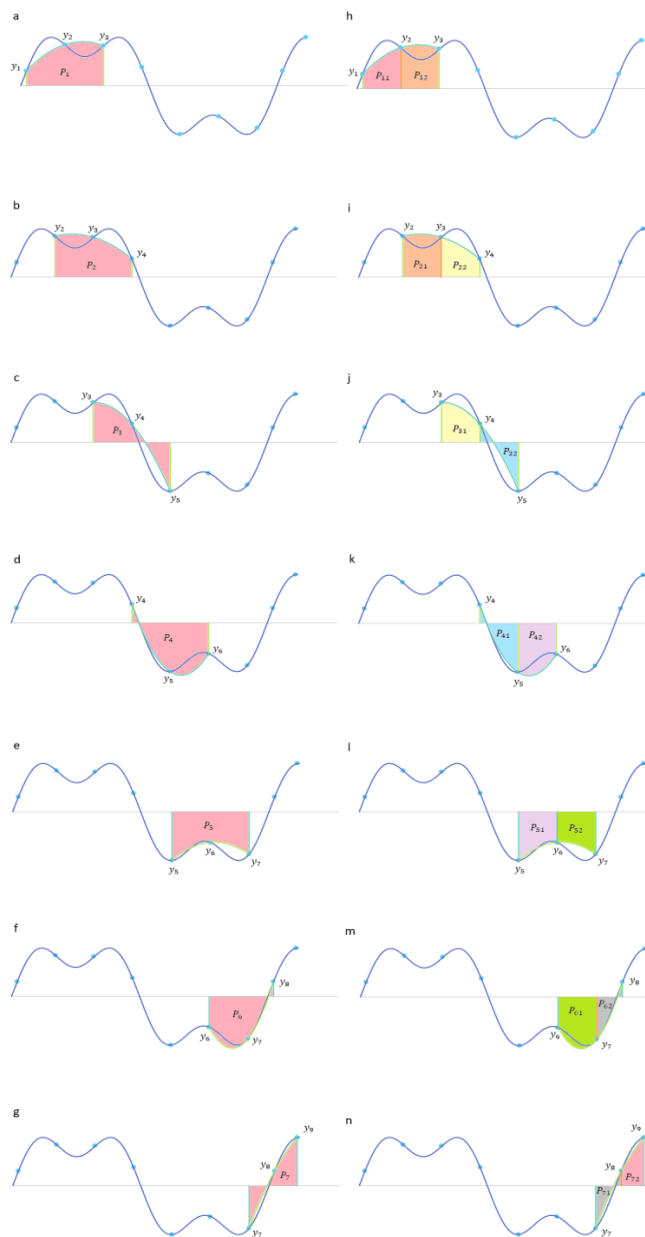
Simpsonova pravila zahtevaju određeni broj odbiraka dobijenih u okviru periode. Kako je ukupan broj odbiraka koji će se dobiti u procesu diskretizacije nepoznat, ove metode se u praksi vrlo retko koriste. Broj odbiraka po periodu zavisi od učestanosti odabiranja, učestanosti signala, ali i od momenta kada počinje proces odabiranja. Taj broj je nekad za jedan veći, a nekad za jedan manji od celobrojne vrednosti količnika te dve učestanosti.

Da bi se pronašlo rešenje ovog fenomena i metoda učinila univerzalno primenljivom, autori ovog rada predlažu modifikacije Simpsonovih pravila. U daljem tekstu, fokus će

biti na modifikovanim Simpsonovim pravilima. Više o Simpsonovim pravilima se može pronaći u [7].

Simpsonovo 1/3 pravilo (SR1/3) predstavlja postupak numeričke integracije koji koristi polinomijalnu funkciju drugog reda za svaka tri susedna odbirka u okviru periode. Ova metoda je primenljiva u slučaju kada je ukupan broj odbirka u okviru periode neparan. Modifikacija ove metode nazvana je Modifikovano Simpsonovo 1/3 pravilo (MSR1/3).

MSR1/3 je predstavljeno na slici 3. Podintervali se dobijaju na osnovu svaka tri susedna odbirka pomoću polinoma drugog reda u okviru intervala integracije, što je prikazano na grafiku na slici 3, od 3a do 3f: prvi podinterval ( $P_1$ ) je određen na osnovu prva tri susedna odbirka ( $y_1, y_2, y_3$ ), podinterval  $P_2$  na osnovu naredna tri odbirka ( $y_2, y_3, y_4$ ) i, analogno tome,  $P_3$  ( $y_3, y_4, y_5$ ),  $P_4$  ( $y_4, y_5, y_6$ ),  $P_5$  ( $y_5, y_6, y_7$ ) i  $P_6$  ( $y_6, y_7, y_8$ ).



Sl. 3. Modifikovano Simpsonovo 1/3 pravilo

Ako podelimo površinu  $P_1$  (slika 3a) na dve disjunktne površine  $P_{11}$  i  $P_{12}$  (slika 3h), i površinu  $P_2$  (slika 3b) na površine  $P_{21}$  i  $P_{22}$  (slika 3i), može se uočiti da su površine  $P_{12}$  i  $P_{21}$  formirane nad istim odbircima, ali su dobijene pomoću različitih parabola, te se njihove vrednosti ipak razlikuju. Međutim, ako uzmemo u obzir da je ta razlika dovoljno mala, i da je u daljem proračunu  $P_{i,2} = P_{i+1,1}$  za  $i=1,2,3,4,5$ , dobijamo da se u sumi površina od  $P_1$  do  $P_6$  sve podpovršine  $P_{i,2}$ , za  $i=1,2,3,4,5$  javljaju po dva puta, a  $P_{11}$  i  $P_{62}$  samo jednom. Iz ovog razloga je neophodno uzeti i dva naredna odbirka van periode ( $y_8$  i  $y_9$ ), kako bi ovakvom aproksimacijom dobili duplo veću ukupnu površinu od one koja nam je potrebna. Vrednosti dodatih odbiraka su bliske vrednostima  $y_1$  i  $y_2$ , te se na ovaj način dobijaju podpovršine  $P_{71}$  i  $P_{72}$  (nastale na osnovu odbiraka  $y_7, y_8, y_9$ ) bliske po vrednostima podpovršinama  $P_{62}$  i  $P_{11}$ , respektivno. Deljenjem ovako estimirane ukupne površine sa dva, dobija se aproksimacija određenog integrala nad periodom.

Na slici 4, u uokvirenom delu, je dat prikaz površina i njihovih disjunktne podpovršine dobijenih na osnovu periode. Podpovršine koje su bliske po vrednostima su obeležene istim bojama. Dodavanje semplova  $y_8$  i  $y_9$  rezultiralo je stvaranjem površine  $P_7$ , što je omogućilo procenu određenog integrala  $P$  nad periodom.

$P_1 =$	$P_{11}$	$+$	$P_{12}$
$P_2 =$	$P_{21}$	$+$	$P_{22}$
$P_3 =$	$P_{31}$	$+$	$P_{32}$
$P_4 =$	$P_{41}$	$+$	$P_{42}$
$P_5 =$	$P_{51}$	$+$	$P_{52}$
$P_6 =$	$P_{61}$	$+$	$P_{62}$
$P_7 =$	$P_{71}$	$+$	$P_{72}$

Sl. 4. Modifikovano Simpsonovo 1/3 pravilo

Procene određenog integrala  $P$  i  $U_{eff}$  primenom modifikovanog Simpsonovog 1/3 pravila nad periodom date su u izrazima (6) i (7).

$$P \approx \Delta T \left( \frac{y_1 + y_n}{6} + \frac{5}{6}(y_2 + y_{n-1}) + \sum_{i=3}^{n-2} y_i \right) \quad (6)$$

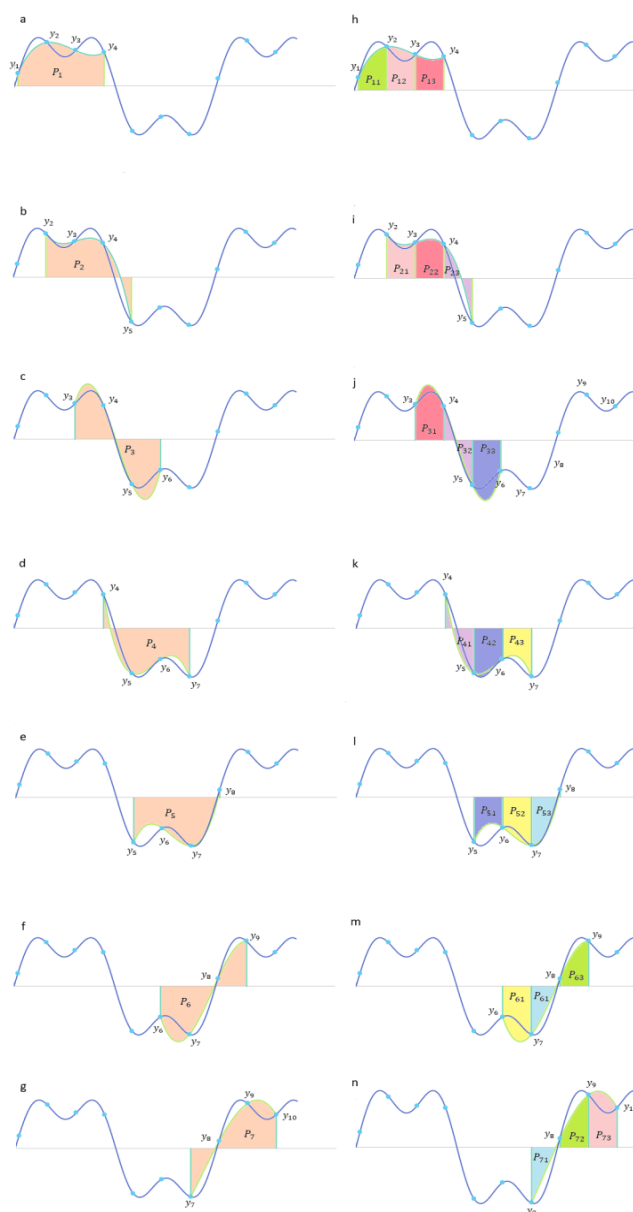
$$U_{eff} \approx \sqrt{\frac{1}{n-2} \left[ \frac{1}{6} \quad \frac{5}{6} \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad \frac{5}{6} \quad \frac{1}{6} \right] \cdot U} \quad (7)$$

#### D. Modifikovano Simpsonovo 3/8 pravilo

Ovaj metod predstavlja modifikovano Simpsonovo 3/8 pravilo (MSR3/8), predloženo od strane autora ovog rada. Modifikacija omogućava eliminaciju ograničenja Simpsonovog 3/8 pravila u pogledu broja odbiraka u okviru

periode koji iznosi  $3k + 1$  za  $k \in N$ . Postupak modifikovanja je sličan onom koji se koristi za dobijanje MSR1/3, sa tom razlikom da su potrebna tri naredna odbirka pored dobijenih odbiraka u okviru periode. Slika 5 ilustruje MSR3/8.

Podintervali su dobijeni na osnovu svaka četiri uzastopna odbirka pomoću kojih je određena kubna funkcija. U sumi svih površina definisanih na osnovu osnovne periode, površine  $P_{11}$  i  $P_{53}$  se javljaju jednom. Kako su  $P_{12} \approx P_{21}$  i  $P_{43} \approx P_{52}$ , površine  $P_{12}$  i  $P_{43}$  se javljaju po dva puta. Sve ostale površine se pojavljuju po tri puta u izrazu za sumu svih površina nad periodom. Kako su vrednosti  $P_{63}$  i  $P_{72}$  bliske vrednosti površine  $P_{11}$ , i vrednosti površina  $P_{21}$  i  $P_{73}$  bliske vrednosti površine  $P_{12}$ , suma svih površina na ovako definisanoj periodi je tri puta veća od one koja nam je potrebna. Ovo uslovljava procenu određenog integrala i efektivne vrednosti nad datom periodom na način koji je prikazan u izrazima (8) i (9), respektivno.



Sl. 5. Modifikovano Simpsonovo 3/8 pravilo

$$P \approx \Delta T \left( \frac{y_1 + y_n}{8} + \frac{1}{2}(y_2 + y_{n-1}) + \frac{7}{8}(y_3 + y_{n-2}) + \sum_{i=4}^{n-3} y_i \right) \quad (8)$$

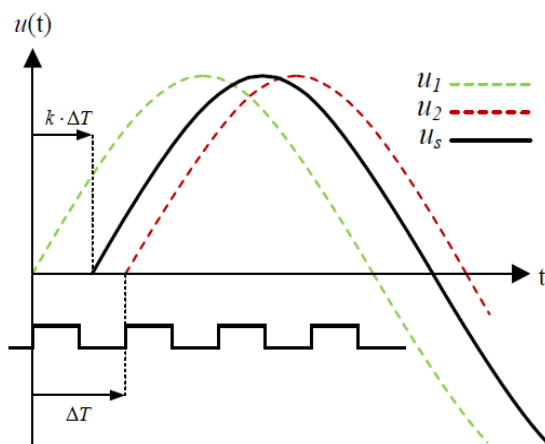
$$U_{eff} \approx \sqrt{\frac{1}{n-2} \left[ \frac{1}{8} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{7}{8} \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad \frac{7}{8} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{8} \right] \cdot U} \quad (9)$$

Modifikacije Simpsonovih pravila se ogledaju u dodavanju naredna dva, odnosno tri odbirka na one dobijene u okviru periode. Na ovaj način je postignuta univerzalna primenljivost modifikovanih metoda jer njihova primena više nije ograničena brojem odbiraka u okviru intervala integracije.

### III. SIMULACIJE

Ulazni parametar za algoritam semplovanja predstavlja period  $\Delta T = 1/f_s$ , gde je  $f_s$  učestanost odabiranja. Trenutak kada započinje semplovanje je definisan pojavom rastuće ivice periodične povorke pravougaonih impulsa (slika 6).

Merni sistem može da bude u dva različita stanja. Jedno je stanje u kojem signal ima nultu vrednost u momentu semplovanja ( $u_1(t)$  i  $u_2(t)$  na slici 6), a drugo ono u kojem signal ima vrednost koja je između dva uzastopna trenutka semplovanja ( $u_s(t)$ ). Vremenski interval između trenutka kada signal dosegne nultu vrednost i sledećeg trenutka semplovanja može da ima vrednost od 0 do  $\Delta T$ . Uvođenjem koeficijenta  $k$ , čija je vrednost iz intervala od 0 do 1, definišemo trenutak kada signal dostiže svoju nultu vrednost.



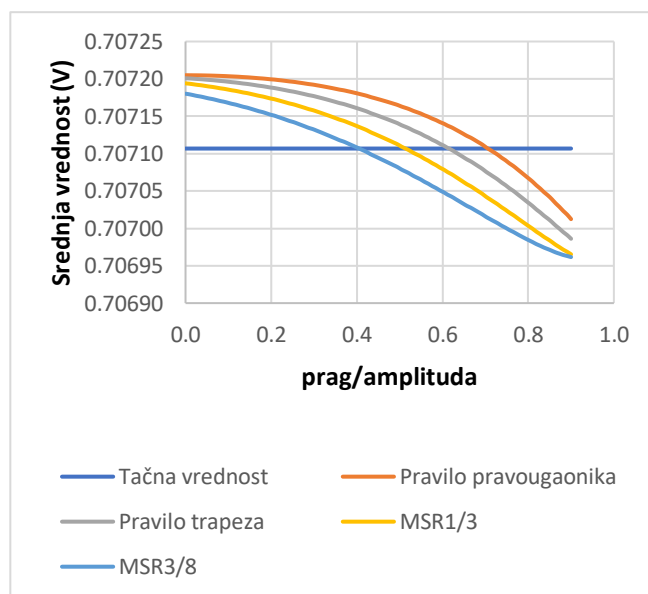
Sl. 6. Merni sistem i stanja u kojima on može da bude

Simulacije koje su sprovedene u ovom istraživanju imaju zadatak da pokažu kako vrednost napona (prag) na osnovu kojeg je određivan početak i kraj periode utiče na procenu efektivne vrednosti napona, u slučaju kada su primenjene četiri metode: pravilo pravougaonika, pravilo trapeza, MSR1/3 i MSR3/8 na primeru prostoperiodičnog napona amplitude 1 V i učestanosti 50 Hz. U tu svrhu je korišćen LabVIEW softver, koji je izabran jer može da se koristi i za realna merenja koja će biti sprovedena u daljem istraživanju značaja izbora praga periode.

### IV. REZULTATI SIMULACIJA

Simulacionim putem je proveravano ponašanje izračunate efektivne vrednosti po četiri numeričke metode, za fiksiran odnos učestanosti odabiranja i učestanosti osnovnog harmonika napona 25,6. Menjana je vrednost praga u rasponu od 0 do 0,9 od vrednosti amplitude. Svaka situacija je ponavljana 100 puta za nasumične vrednosti koeficijenta  $k$ . Za dobijeni skup vrednosti određena je srednja vrednost i standardna devijacija. Za potrebe ovog rada uzet je jedan reprezentativan slučaj  $f_s/f$ , i ova dimenzija problema nije analizirana zbog ograničenosti opsega rada.

Na slici 7 je prikazano ponašanje srednje vrednosti napona za sve četiri numeričke metode u zavisnosti od praga. Sva četiri grafika pokazuju da postoji sistematsko odstupanje, usled kojeg se za male vrednosti praga dobija veći rezultat, odnosno za veće vrednosti praga dobija manji rezultat od očekivane tačne vrednosti. Tačna vrednost je određena matematičkim putem na osnovu definicije efektivne vrednosti i poznavanja talasnog oblika napona. Za svaku od metoda postoji optimalna vrednost praga kada nema sistematske greške. Kao što je predočeno u [6], očekivana vrednost za pravougaonu metodu je jednaka efektivnoj vrednosti napona. Pri primeni ostalih metoda, optimalna vrednost praga je manja nego kada se upotrebljava pravougaona metoda.

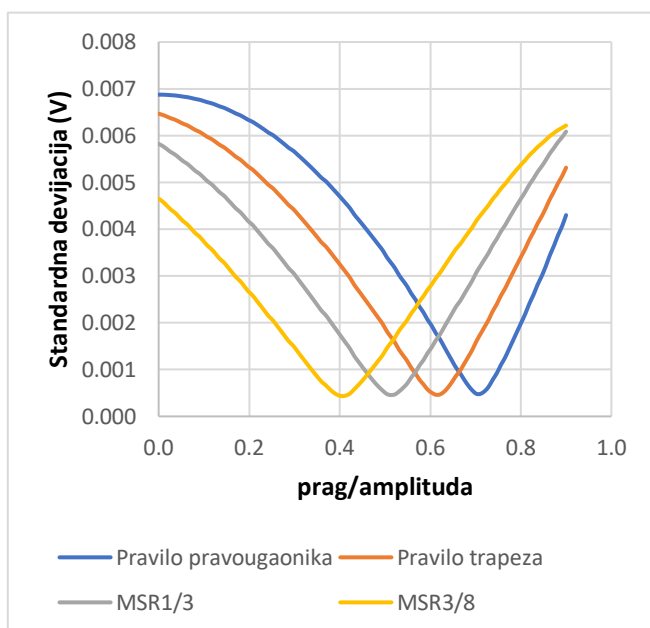


Sl. 7. Rezultati simulacija srednje vrednosti signala za odnos učestanosti odabiranja i učestanosti signala 25,6

Na slici 8 je prikazana zavisnost standardne devijacije četiri numeričke metode u zavisnosti od praga na osnovu kojeg se definiše perioda. Vidimo da uvek postoji rasipanje, odnosno slučajna greška koja zavisi od koeficijenta  $k$ , na koji ne možemo lako da utičemo. Za svaku od metoda se uočava da postoji minimum koji se javlja upravo za vrednost praga kada nema sistematske greške.

Najveća sistematska greška iskazana relativno nije veća od 0,015 %, dok najveća slučajna greška nije veća od 1 %. Dakle, prisutna je mnogo veća slučajna greška nego sistematska i to preko 60 puta. Ove vrednosti se dobijaju ukoliko se ne vodi računa o pragu na osnovu kojeg se definiše perioda. Ako se za

prag odabere optimalna vrednost, data u tabeli, onda se situacija značajno poboljšava. Sistematska greška postaje nula, a slučajna greška je približno 0,07%. Drugim rečima, odabiranjem optimalnog praga u potpunosti se eliminiše sistematska greška, a slučajna se smanjuje i do 15 puta.



Sl. 8. Rezultati simulacija standardne devijacije za odnos učestanosti odabiranja i učestanosti signala 25,6

Interesantno je primetiti da odabirom optimalnog praga za definisanje periode dobijamo istu vrednost za slučajnu grešku bez obzira na izbor numeričke metode kojom se određuje efektivna vrednost napona.

#### ZAKLJUČAK

U ovom istraživanju, modifikovani su Simpsonovo 1/3 pravilo i Simpsonovo 3/8 pravilo čime je postignuta njihova univerzalna primenljivost. Ispitivane su performanse računanja procene efektivne vrednosti u odnosu na izbor periode. Simulacijama je potvrđeno da je pri primeni pravila pravougaonika optimalan izbor praga periode efektivna vrednost, dok se ta vrednost razlikuje kada se upotrebljavaju ostale metode. Pokazano je da se odabiranjem optimalnog praga u potpunosti eliminiše sistematska greška, a slučajna se znatno smanjuje. Ovo dovodi do zaključka o validnosti pretpostavke o uticaju izbora praga periode na određivanje procene efektivne vrednosti signala.

#### LITERATURA

- [1] S. Kosonocky, P. Xiao, "Analog-to-digital conversion architectures," in K. V. Madisetti and D. B. Williams (eds), *Digital Signal Processing Handbook*, pp. 106-119, Boca Raton, USA: Crc Press Llc, 1999.
- [2] V. Vujicic, "Generalized low-frequency stochastic true RMS instrument," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 50, no. 5, pp. 1089-1092, IEEE, October, 2001.
- [3] V. Vujicic, D. Pejic, "Accuracy limit of high-precision stochastic Watt-hour meter," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 49, no.3, pp. 617-620, IEEE, June, 2000.
- [4] M. Kampik, H. Laiz, M. Kolnz, "Comparison of three accurate methods to measure AC voltage at low frequencies," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 49, no. 2, pp. 429-433, IEEE, April, 2000.
- [5] P. Petrović, "New digital multimeter for accurate measurement of synchronously sampled AC signals," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 53, no. 3, pp. 716-725, IEEE, June, 2004.
- [6] P. Miljanic, "Definitions of the average and RMS values suitable for the measurement and descriptions of quasi steady state," *Electronics*, vol. 5, no. 1-2, pp. 18-20, 2001.
- [7] S. P. Venkateshan, "Numerical Integration", in: S. P. Venkateshan and P. Swaminathan (eds.), *Computational Methods in Engineering*, 1st edition, pp 317-373. Oxford, UK: Academic Press, 2013.
- [8] Anon, HP 3458A Operating, Programming and Configuration Manual, 1988, Accessed 5 May 2020.

#### ABSTRACT

This paper explores the quality of the estimation of the root mean square (RMS) of the voltage signal using the rectangular method, trapezoidal rule, modified Simpson's 1/3 rule, and modified Simpson's 3/8 rule, respectively, depending on the selected period. Modified Simpson's rules do not require a particular number of samples for the numerical analysis purposes, which ensures their general applicability. The paper offers a concise overview of the approaches to the estimation of the RMS of the voltage signal using these methods. In addition, the simulation tests of their application are presented. It has been shown that both the estimation of the RMS and measurement results depend on the selection of the period. In order to improve measurement performances, the most adequate period was selected for each method. That has effected better results of the estimation of the RMS by making direct changes in the firmware without additional investment in the hardware.

#### The Impact of the Selection of the Starting Point of the Conversion on the Estimation of the RMS

Marina Subotin, Dragan Pejić, Stefan Mirković,  
Nemanja Gazivoda, Marjan Urekar i Bojan Vujičić