Mogućnost primene Hamonovih presloživih otpornika u naizmeničnom režimu

Stefan Mirković, Dragan Pejić, Marina Subotin, Nemanja Gazivoda, Zdravko Gotovac

***Apstrakt*—U većini primena u praksi Hamonovi (presloživi) otpornici nalaze svoje mesto u DC režimu. Njihova prvenstvena uloga nije da budu etaloni otpornosti, već etaloni prenosnog odnosa otpornosti. U ovom radu su izneti osnovni predlozi primene Hamonovih otpornika u AC režimu. Zbog svojih dobrih metroloških karakteristika u DC režimu, u radu su postavljene hipoteze koje pokušavaju da te karakteristike iskoriste u AC režimu.**

***Ključne reči*—merenje;odnos;etalon;standard;otpornik.**

I. HAMONOVI OTPORNICI

Pod Hamonovim otpornicima se smatra grupa od n otpornika iste nazivne vrednosti koji su međusobno trajno redno povezani preko četvorožičnih spojeva. Otpornost izvoda ovih spojeva uračunata je u otpornost pojedinačnih otpornika. Kod Hamonovih otpornika, teži se da se postigne visoka tačnost pojedinačnih otpornika. Na naponske i strujne izvode otpornika dodaju se kompenzacioni otpornici koji svi zajedno čine kompenzacionu mrežu. Prespajanje u paralelnu vezu vrši se preko te specijalne kompenzacione mreže otpornika i pomoću posebnih kratkospojnika. Za n redno vezanih otpornika pri povezivanju u paralelnu vezu postiže se smanjenje otpornosti za veoma približno n^2 puta. Odnos otpornosti redne i paralelne veze naziva se i transferom Hamonovog otpornika. Kako bi se potisnuli negativni efekti otpornosti spojeva u cilju povećanja tačnosti Hamonovog transfera, koriste se četvorožični spojevi otpornika. Grešku transfera izazivaju takozvane prolazne (podužne i poprečne) otpornosti četvorožičnih spojeva. Ovaj negativni efekat se kompenzuje dodavanjem pomenutih kompenzacionih otpornika koji realizuju kompenzacionu mrežu.

Posmatra se grupa od n otpornika iste nazivne vrednosti. Stvarna vrednost pojedinačnog otpornika je:

$$R_i = R + \Delta R_i \qquad (1)$$

gde je R srednja vrednost grupe otpronika a ΔR_i razlika između stvarne vrednosti pojedinačnog otpornika i srednje vrednosti grupe. Srednja vrednost grupe otpornika je:

$$R = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i \qquad (2)$$

Ako se (1) svede na sledeći način:

$$R_i = R\left(1 + \frac{\Delta R_i}{R}\right) \qquad (3)$$

može se reći da je

$$R_i = R\left(1 + \delta_{R,i}\right) \qquad (4)$$

gde je $\delta_{R,i}$ relativno odstupanje pojedinačnih otpornika od srednje vrednosti grupe. Ekvivalentna otpornost redne veze n otpornika (R_S) je:

$$R_S = \sum_{i=1}^{n} R_i = \sum_{i=1}^{n} R\left(1+\delta_{R,i}\right) = nR\left(1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{R,i}\right) \qquad (5)$$

Pošto je zbir odstupanja pojedinačnih uzoraka od aritmetičke sredine nekog skupa jednak nuli, to znači da je član:

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_{R,i} = 0 \qquad (6)$$

Prema tome, (5) dobija sledeći oblik:

$$R_S = \sum_{i=1}^{n} R_i = nR \qquad (7)$$

Ekvivalentna otpornost paralelne veze n otpornika (R_P) može se odrediti na osnovu sledećeg izraza:

$$\frac{1}{R_P} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i} \Rightarrow R_P = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R\left(1+\delta_{R,i}\right)}} = \frac{R}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\delta_{R,i}\right)}} \qquad (8)$$

Odnos ekvivalentne otpornosti serijske i paralelne veze n otpornika je:

$$\frac{R_S}{R_P} = \frac{nR}{\frac{R}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\delta_{R,i}\right)}}} = n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\delta_{R,i}\right)} \qquad (9)$$

Za $|\delta_i| < 1$, može se primeniti razvoj elementarne funkcije u Maklorenov red:

$$\frac{1}{\left(1+\delta_{R,i}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\delta_{R,i}\right)^k = 1 - \delta_{R,i} + \delta_{R,i}^2 - \delta_{R,i}^3 + \ldots \qquad (10)$$

Zbog (6) dolazi do poništavanja linearnih članova u sledećem izrazu, i uz zanemarivanje članova 3. i višeg reda, dobija se sledeća aproksimacija:

Stefan Mirković – Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Trg D. Obradovića 6, Novi Sad, Srbija (e-mail: mirkovicst@uns.ac.rs).
Dragan Pejić – Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Trg D. Obradovića 6, Novi Sad, Srbija (e-mail: pejicdra@uns.ac.rs).
Marina Subotin – Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Trg D. Obradovića 6, Novi Sad, Srbija (e-mail: marina.bulat@uns.ac.rs).
Nemanja Gazivoda – Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Trg D. Obradovića 6, Novi Sad, Srbija (e-mail: nemanjagazivoda@uns.ac.rs).
Zdravko Gotovac – Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Trg D. Obradovića 6, Novi Sad, Srbija (e-mail: zdravko.gotovac@uns.ac.rs).

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\delta_{R,i}\right)}\approx\sum_{i=1}^{n}\left(1-\delta_{R,i}+\delta_{R,i}^{2}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(1+\delta_{R,i}^{2}\right) \quad (11)$$

Na osnovu toga, (9) dobija sledeći oblik:

$$\frac{R_S}{R_P}=n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\delta_{R,i}\right)}\approx n^2\left(1+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{R,i}^{2}\right) \quad (12)$$

Poslednji izraz pokazuje da je odnos redne i paralelne veze (transfer) istih n otpornika sa velikom tačnošću jednak kvadratu broja otpornika. Ako se pri ovoj analizi zanemare otpornosti spojeva, može se videti da je glavni uzročnik greške transfera rasipanje vrednosti otpornika oko srednje vrednosti grupe. Relativna vrednost ove greške je:

$$\delta_{DC}=\frac{n^2-\dfrac{R_S}{R_P}}{\dfrac{R_S}{R_P}}\approx\frac{-\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{R,i}^{2}}{1+\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{R,i}^{2}}=-\frac{\left(\dfrac{\sigma(R_i)}{R}\right)^2}{1+\left(\dfrac{\sigma(R_i)}{R}\right)^2} \quad (13)$$

Greška odnosa (transfera) približno zavisi od varijanse otpornosti grupe. Pri merenju odnosa otpornosti (transfera), nije od velike važnosti tačnost pojedinačnih otpornika već njihova međusobna ujednačenost. Takođe nije potrebna ni visok dugoročna stabilnost otpornosti. Potrebno je i dovoljno da odgovarajuća stabilnost bude održana unutar intervala trajanja jednog merenja. Visoka tačnost transfera važi samo za velike otpornosti, kada se otpornosti spojnih vodova mogu zanemariti. Kod otpornosti pojedinačnih otpornika ispod 100 Ω otpornosti spojnih vodova mogu uzrokovati značajne greške, pa se kompenzacione mreže obavezno koriste.

Hamonovi etaloni pored svoje prvenstvene uloge da budu etaloni prenosnog odnosa otpornosti, nalaze primenu i kao etaloni otpornosti. Razlog ovome je što se oni prave od vrlo kvalitetnih otpornika pa se po svojoj tačnosti mogu porediti sa radnim etalonima. Međutim, pažljivom izradom pojedinačnih otpornika i spojeva, postiže se da greška transfera bude znatno manja od grešaka samih otpornika. Kod poređenja dve otpornosti Hamonovim etalonom, jedna otpornost se poredi sa Hamonovim etalonom kojem su otpornici presloženi u rednu vezu, a drugi otpornik sa istim Hamonovim etalonom kojem su otpornici presloženi u paralelnu vezu. Sada kada se raspolaže sa dva različita rezultata poređenja, traženi odnos te dve otpornosti se računa kao količnik ta dva rezultata poređenja pomnožen sa n^2, tj. sa transferom tog Hamonov etalona. Kod komercijalnih Hamonovih etalona greška transfera može biti ispod 1 ppm. Metodom indirektnog poređenja dve otpornosti pomoću odgovarajućeg Hamonovog etalona postiže se visoka tačnost. Na primer, kod prenošenja vrednosti otpornosti reprodukovane kvantnim Holovim (Hall) efektom na vrednost od 1 Ω i pri dvostrukom transferu 10 000 Ω : 100 Ω i 100 Ω : 1 Ω, postignuta je merna nesigurnost krajnjeg rezultata od oko 10^{-8}.

II. Otpornik kao impedansa

Glavna hipoteza ovog rada se odnosi na to da li ono što važi u DC režimu, na neki način može da važi i u AC režimu, kada se umesto otpornika posmatraju impedanse (moduli i faze)?

U cilju procene ponašanja Hamovonih otpornika ako bi se posmatrali kao impedanse, koje imaju svoj moduo i svoju fazu, izvršene su pre svega matematičke procene, a zatim i računarske simulacije. Glavna ideja je bila da se uoči zavisnost transfera grupe otpornika od promene modula i faze pojedinačnih otpornika. Posmatrana je grupa od n impedansi, sa istim nazivnim modulom i fazom. Tolerancija nazivne vrednosti modula za sve impedanse grupe je ista. Isto važi i za fazu.

Ako se umesto grupe otpornika posmatra grupa od n impedansi, stvarna vrednost pojedinačne impedanse je:

$$\underline{Z_i}=R_i+jX_i=Z_i\cdot e^{j\theta_i} \quad (14)$$

gde je Z_i moduo pojedinačne impedanse, a θ_i njena faza. Aritmetička sredina impedansi grupe je:

$$\underline{Z}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underline{Z_i}=R+jX=Z\cdot e^{j\theta} \quad (15)$$

Z predstavlja moduo aritmetičke sredine grupe, a θ fazu aritmetičke sredine grupe. Moduo i faza pojedinačne impedanse može se napisati u sledećem obliku:

$$Z_i=Z\left(1+\delta_{Z,i}\right) \quad (16)$$

$$\theta_i=\theta\left(1+\delta_{\theta,i}\right) \quad (17)$$

gde je $\delta_{Z,i}$ relativno odstupanje modula pojedinačne impedanse od modula aritmetičke sredine grupe. Isto tako, $\delta_{\theta,i}$ je relativno odstupanje faze pojedinačne impedanse od faze aritmetičke sredine grupe. Izraz za ekvivalentnu impedansu serijske veze impedansi grupe je:

$$\underline{Z_S}=\sum_{i=1}^{n}\underline{Z_i}=Z_S e^{j\theta_S} \quad (18)$$

Na osnovu (15) i (18) može se napisati da je:

$$\underline{Z_S}=n\underline{Z} \quad (19)$$

Izraz za admitansu paralelne veze impedansi grupe je:

$$\frac{1}{\underline{Z_P}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\underline{Z_i}}=\frac{1}{Z_P e^{j\theta_P}} \quad (20)$$

Pomoću (19) i (20) , dobija se da je odnos impedansi serijsko i paralelno vezanih impedansi grupe:

$$\frac{\underline{Z_S}}{\underline{Z_P}}=\frac{Z_S e^{j\theta_S}}{Z_P e^{j\theta_P}}=n\underline{Z}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\underline{Z_i}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{nZe^{j\theta}}{Z_i e^{j\theta_i}} \quad (21)$$

Uzimanjem u obzir (16) i (17), prethodni izraz se može napisati u sledećem obliku:

$$\frac{\underline{Z_S}}{\underline{Z_P}}=n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+\delta_{Z,i})}e^{-j(\theta\cdot\delta_{\theta,i})} \quad (22)$$

Sređivanjem (22) dobija se:

$$\frac{Z_S}{Z_P}e^{j(\theta_S-\theta_P)}=n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+\delta_{Z,i})}e^{-j(\theta\cdot\delta_{\theta,i})} \quad (23)$$

Prevođenjem leve i desne strane prethodne jednakosti iz polarnog u Kartezijanski (Dekartov) sistem, dobijaju se sledeće dve jednakosti:

$$\frac{Z_S}{Z_P}\cos(\theta_S-\theta_P)=n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+\delta_{Z,i})}\cos(\theta\cdot\delta_{\theta,i}) \qquad (24)$$

$$-\frac{Z_S}{Z_P}\sin(\theta_S-\theta_P)=n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+\delta_{Z,i})}\sin(\theta\cdot\delta_{\theta,i}) \qquad (25)$$

$$(\theta_S-\theta_P)=\arctan\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+\delta_{Z,i})}\sin(\theta\cdot\delta_{\theta,i})}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+\delta_{Z,i})}\cos(\theta\cdot\delta_{\theta,i})}\right) \qquad (26)$$

Uvođenjem smene i rešavanjem ove dve jednakosti, dobijaju se krajnji izrazi koji pokazuju kakav je moduo i faza odnosa serijske i paralelne veze impedansi grupe:

$$\frac{Z_S}{Z_P}=\frac{n}{\cos(\theta_S-\theta_P)}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+\delta_{Z,i})}\cos(\theta\cdot\delta_{\theta,i})= -\frac{n}{\sin(\theta_S-\theta_P)}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+\delta_{Z,i})}\sin(\theta\cdot\delta_{\theta,i}) \qquad (27)$$

Z_S / Z_P predstavlja moduo navedenog odnosa, a $(\theta_S-\theta_P)$ njegovu fazu (fazu transfera). U (26) i (27) argument funkcija *sin* i *cos* je ugao $\theta\cdot\delta_{\theta,i}$, koji ustvari predstavlja razliku faza pojedinačne impedanse i aritmetičke sredine grupe.

Vidi se da u ovim izrazima vrednost modula pojedinačnih impedansi ne utiče na rezultat, dok njihove tolerancije, odnosno rasipanje tih modula utiče. Što se tiče faze, vidi se da u ovim izrazima figuriše ugao $\theta\cdot\delta_{\theta,i}$. Utvrđeno je da se ugao $\theta\cdot\delta_{\theta,i}$ nalazi u opsegu koji je veoma sličan opsegu definisanim nazivnom vrednošću faze pojedinačnih impedansi i njihovim tolerancijama.

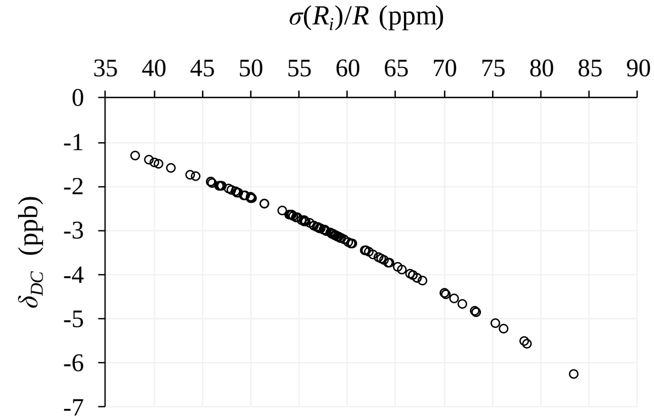
Ako se pogleda (22), izraz za transfer impedansi, i ako se pretpostavi da su sve faze impedansi jednake, bez obzira koliko one iznose, ugao $\theta\cdot\delta_{\theta,i}$ jednak je nuli. Pod ovim uslovom, kompleksni deo u (22) nestaje. Ovo dovodi do sledećeg zaključka da što je rasipanje faza impedansi grupe manje, transfer te grupe je bliži realnom broju. Ako se pretpostavi idealan slučaj da je $\sigma(R_i)$ i $\sigma(X_i)$ jednako nuli, transfer impedansi će biti n^2, bez obzira na to kolika je faza impedansi. Relativna greška transfera može se definisati kao:

$$\underline{\delta_{AC}}=\frac{n^2-\dfrac{\underline{\underline{Z_S}}}{\underline{Z_P}}}{\dfrac{\underline{\underline{Z_S}}}{\underline{Z_P}}} \qquad (28)$$

III. Rezultati

U cilju dobijanja konkretnih rezultata kao smernica za dalja istraživanja, izvršena je simulacija kojom je određivan odnos serijske i paralelne veze *n* impedansi. Pretpostavka je bila da su simulirane takve impedanse, čiji bi moduli, rasipanje tih modula, faza i rasipanje tih faza odgovaralo realnim situacijama.

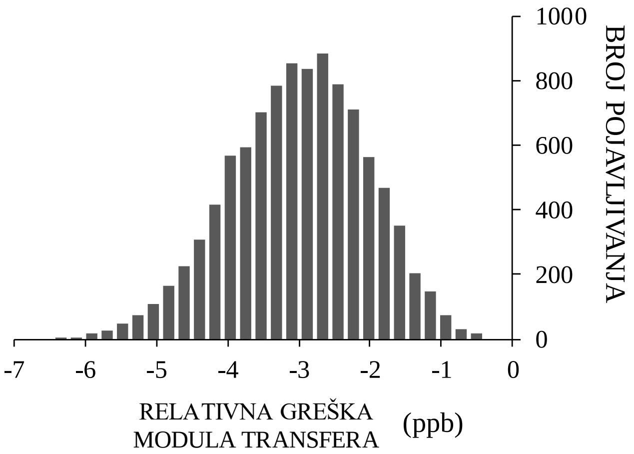
Prvi slučaj je simulacija određivanja transfera *n* otrpornika (DC režim). Simuliranje je vršeno tako što je definisana nazivna vrednost otpornika, kao i tolerancija. Na osnovu tih parametara, izgenerisano je *n* otpornosti. Zatim je određena ekvivalentna serijska, kao i paralelna otpornost. Nakon toga, određen je količnik (odnos) otpornosti serijske i paralelne veze, tj. transfer. Simulirana je situacija sa n=10 otpornika nazivne vrednosti R_n sa tolerancijom 100 ppm prema uniformnoj raspodeli. Određivanje odnosa je ponovljeno 100 puta, gde su dobijana različita rasipanja grupe otpornika. Na sledećoj slici nalazi se zavisnost greške transfera od relativne standardne devijacije (tj. koeficijenta varijacije) grupe otpornika.



Sl. 1. Greška transfera u DC režimu

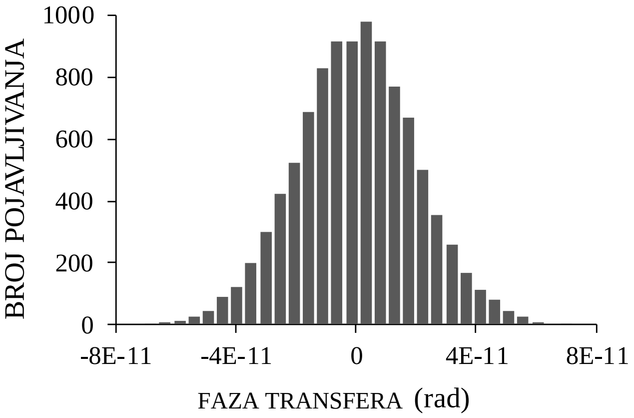
Kako se očekivanja rezultata simulacija zasnivaju na teorijskom modelu (13), dobijeni su očekivani rezultati, i u skladu su sa teorijskim modelom. Ako se posmatra grupa od *n* otpornika nazivne vrednosti R_n sa tolerancijom 100 ppm sa uniformnom raspodelom, matematički (statistički) procenjena relativna standardna devijacija te grupe bila bi približno 58 ppm. Prema (13), grešku transfera treba očekivati da je približno $-(58\ \text{ppm})^2/(1+(58\ \text{ppm})^2)=-0{,}0033$ ppm $=-3{,}3$ ppb (pod “ppb” se smatra da je to relativna vrednost 10^{-9}, odnosno $1:10^9$). Prethodni grafik sa rezultatima simulacija to potvrđuje. Greška transfera približno je jednaka kvadratu koeficijenta varijacije grupe. Za približnu procenu maksimalne greške transfera, uzima se da je koeficijent varijacije grupe otpornika jednak njihovoj toleranciji. Može se videti da je relativna vrednost greške transfera značajno manja od tolerancija samih otpornika kojima se realizuje taj transfer. Upravo zbog ovoga Hamonovi etaloni obezbeđuju visoku tačnost pri prenosu jedne otpornosti na drugu.

Drugi slučaj je simulacija određivanja transfera *n* impedansi (AC režim). Simuliranje je vršeno na isti način kao i prethodno, ali su umesto otpornosti u račun uzete impedanse. Simulirano je n=10 impedansi nazivnog modula Z_n sa tolerancijom od 100 ppm (uniformna raspodela), i nazivne faze θ_n = 0.01 rad sa tolerancijom od 100 ppm (uniformna raspodela). Simulacija je izvršena u 10 000 iteracija.



Sl. 2. Histogram greške modula transfera u AC režimu

Na prethodnoj slici predstavljen je histogram relativne greške modula transfera $(n^2\text{-}Z_S/Z_P)/(Z_S/Z_P)$. Može se videti da se moduo transfera prilično simetrično rasipa oko neke vrednosti. Veoma sličan opseg dobija se i u DC režimu. Može se reći da moduo transfera ima vrlo malo rasipanje i odstupanje od n^2 , što je prvo bitno zapažanje. Na sledećoj slici nalazi se histogram faza transfera.



Sl. 3. Histogram faze transfera u AC režimu

Sledeće veoma bitno zapažanje je da se faza transfera rasipa u veoma uskom opsegu. Razlog tome je što su faze serijske i paralalene veze impedansi iste grupe veoma slične. Primera radi, kada bi se tolerancije modula i faza gore pomenutih impedansi grupe postavile na 1 % (uniformna raspodela), faze serijske od faza paralalene veze bi se razlikovale za približno do 90 ppm. U slučaju da su tolerancije kao i u simulaciji 100 ppm, ove faze bi se razlikove do otprilike 10 ppb.

IV. Zaključak

U situacijama kada se Hamonovi otpornici koriste u DC režimu, pokazuje se da greška transfera zavisi od koeficijenta varijacije grupe otpornika. Što je rasipanje otpornosti oko njihove aritmetičke sredine manje, tim je i greška transfera manja. Simulacije su pokazale da i kod AC režima moduo transfera ima takođe malo odstupanje od n^2. Sledeće bitno zapažanje je da se faza transfera rasipa u okolini ili u blizini nule. Treba obratiti pažnju da se, prema ovoj simulaciji i za ovu grupu otpornika, greška transfera u DC režimu i greška modula transfera u AC režimu, nalaze u sličnom opsegu, i reda su ppb-a.

Ove simulacije, kao i prikazane matematičke hipoteze, daju ohrabrujuće rezultate za dalja istraživanja i primenu Hamonovih etalona u AC režimu.

Literatura

[1] "SR-1010 Series Resistance Transfer Standards USer and Service Manual," *IET LABS, INC.*, 534 Main Street, Westbury, NY 11590, November, 2008.

[2] R. Radetić, *Električna otpornost: pojava i merenja: sa originalnim rešenjima autora,* Agencija Eho, Niš, 2015.

[3] D. G. Jarrett, "Evaluation of Guarded High-Resistance Hamon Transfer Standards," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. *48*, no. *2*, April, 1999.

[4] B. V. Hamon, "A 1-100 Ω build-up resistor for the calibration of standard resistors", *Jour. Sci. Instr.*, vol. 31, pp. 450-453, 1954.

[5] J. Bohacek, "Evaluation of frequency performance of resistance standards", IMTC/2002. Proceedings of the 19th IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference, 2002.

[6] J. C. Riley, "The Accuracy of Series and Parallel Connections of Four-Terminal Resistors", *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement,*, vol. 16, 1967.

[7] White, D.R., Jones, K., Williams, J.M., Ramsey, I.E., "A simple resistance network for calibrating resistance bridges", *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement,*, vol. 46, 1997.

[8] L. Cimeanu, M. Simionescu, "Metrological characterization of reference standard resistors group of 100 Ω by means of Hamon resistor," 2012 International Conference and Exposition on Electrical and Power Engineering, Iasi, Romania, 25-27 October, 2012.

Abstract

In most practical applications, Hamon transfer resistors find their place in DC mode. Their primary role is not to be a standards of resistance, but standards of ratio of restance. In this paper are presented the basic proposals for Hamon standard use in AC mode. Due to their good metrological characteristics in DC mode, paper presents hypotheses that try to use these caharacteristics in AC mode.

Possibility of using Hamon resistors in alternating mode

Stefan Mirković, Dragan Pejić, Marina Bulat, Nemanja Gazivoda