

# Pronalazak Optimizacione Funkcije Kretanja iz Simulirane Demonstracije Pokreta Čučnja

Filip Bečanović, Član, IEEE, Vincent Bonnet, Član, IEEE,  
Samer Mohammed, Član, IEEE, Kosta Jovanović, Član, IEEE

Sažetak—U ovom radu, posebno je uspostavljen pojednostavljeni ravanski biomehanički model čoveka za zadatak čučnja. Koristeći taj model, generišu se višestruki optimalni pokreti u odnosu na različite biomehaničke optimizacione funkcije i njihove linearne kombinacije. Iz optimalnih pokreta, optimizacione funkcije kojim su generisani pronalaze se pomoću inverzne optimizacije. Optimizaciona funkcija koja daje kvalitativno najbliži kretanje ljudskom je kombinacija minimalnog zglobnog momenta, ubrzanja i snage. Međutim, čini se da stvarno ljudsko kretanje minimizira i neke optimizacione funkcije koje nisu razmatrane u ovom radu.

## I. Uvod

Ideja generisanja ljudskih pokreta optimizacijom je zastupljena u literaturi. Pregled takvih pristupa za pokret ustajanja sa stolice i dizanja kutije dat je u [1]. Unutar [2], autor koristi planarni model sa 5 stepeni slobode kako bi generisao zglobne trajektorije za dizanje kutije sa minimalnim zglobnim momentom u članku, i pokazuje da to dovodi do stabilnosti modela po principu Tačke Nultog Momenta. U [3], autori koriste trodimenzionalni model sa 55 stepeni slobode da bi generisali optimalne trajektorije za pokret dizanja kutije, koristeći dve optimizacione funkcije.

Ideja modelovanja ljudskog kretanja kao optimizacije, zatim pronalaska optimizacione funkcije isto je obradjena u literaturi. Unutar [4], autori rada modeluju ljudsko kretanje unutar prostorijske kao kretanje materijalne tačke u dvodimenzionalnom prostoru (iz ptičije perspektive), a izbor trajektorije modeluju kao optimizacioni proces. Uz pomoć takozvane "bi-level" metode za inverznu optimizaciju, oni uspevaju da pronadju optimizacionu funkciju koja generiše trajektorije koje su najpodudarnije sa snimljenim podacima pravih ljudskih trajektorija. U [5] koristeći se sličnom metodom, autori upoređuju rezultate simulacije

Filip Bečanović is a joint Ph.D. student with the School of Electrical Engineering, University of Belgrade, 73 Bulevar kralja Aleksandra, 11020 Belgrade, Serbia, and the University of Paris-Est Créteil, Laboratory of Images, Signals and Intelligent Systems, 120 rue Paul Armangot, 94400 Vitry sur Seine, (email: becaphilipe@gmail.com).

Vincent Bonnet is with the Laboratory for Analysis and Architecture of Systems, 7 avenue du Colonel Roche, 31031 Toulouse, France, (email: bonnet.vincent@gmail.com).

Samer Mohammed is with the University of Paris-Est Créteil, Laboratory of Images, Signals and Intelligent Systems, 120 rue Paul Armangot, 94400 Vitry sur Seine, (email: samer.mohammed@upec.fr).

Kosta Jovanović is with the School of Electrical Engineering, University of Belgrade, 73 Bulevar kralja Aleksandra, 11020 Belgrade, Serbia, (email: kostaj@etf.rs).

sa ljudskim podacima za pokret hvata rukom u transversalnoj ravni. Dok u [6], izučavan pokret je hvat rukom u sagitalnoj ravni.

U [7], predstavljena je nova metoda za inverznu optimizaciju zasnovana na zadovoljavanju Karuš-Kun-Takerovih (KKT) uslova. Ova metoda iskorišćena je u [8] za izučavanje pokreta otvaranja vrata, ili izvlačenja i zatvaranja fioke.

U ovom radu izučavaćemo pokret čučnja, kao jednostavan simetričan pokret koji se može posmatrati samo u sagitalnoj ravni ljudskog tela, i koji je određen većinski zglobovima donjeg dela tela. Upotrebićemo splajn reprezentaciju za trajektorije kao što se to radi u robotici [9], upotrebićemo standardnu formulaciju optimizacionog problema za generisanje trajektorija, a za inverznu optimizaciju upotrebićemo KKT metodu.

## II. Biomehanički model

Ova deonica predstaviće modelovanje ljudskog tela za pokret dizanja kutije.

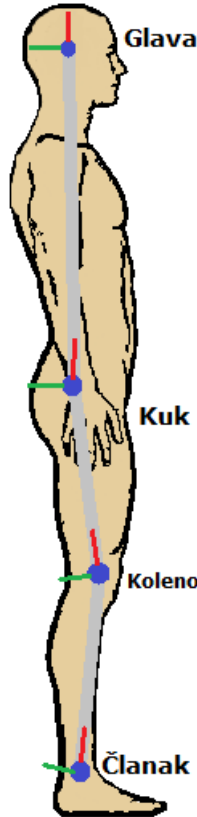
Nalik robotici, ljudsko telo je modelovano kao uzastopna veza krutih tela spojenih zglobovima. Da bi se uprostio model, iskrorišćena je simetrija zadatka kako bi se apstrahovala kretnja i svela na ravansku kretnju u sagitalnoj ravni ljudskog tela. Tim postupkom dobijamo model nalik onome na Slici 1. Osnova ljudskog modela je stopalo, dok segmente čine potkolenica, butina, i skup svih delova tela iznad trupa. Istim redosledom, povezuju ih članak, koleno, i kuk. Zajedno, ovi zglobovi daruju modelu tri ravanska stepena slobode. Treba primetiti da zbog ravanske abstrakcije, simetrični delovi tela bivaju duplirani, što znači da se noge i njihovi zglobovi svode na jednu nogu sa istim zglobovima.

Visina i masa modela fiksirane su, i jednake 1.83m i 81kg respektivno. Kinematski i inercijalni parametri delova tela određeni su korišćenjem antropometričkih tabela iz [10], iz kojih se mogu odrediti dužine segmenata, masa segmenata, pozicije centara mase segmenata, kao i matrice inercije segmenata. Duplirani segmenti modela imaju duplirane mase kao i duplirane inercije. Istovremeno, sve iznad trupa je spojeno u jedan segment, a samim tim spojene su njihove mase i inercije.

S obzirom na to da ćemo izučavati kinematiku zglobova u zglobnom prostoru, kao i kinematiku završnog uređaja (ruke) u Kartezijanskom prostoru, ali i dinamiku u zglobnom prostoru (momenti sile u zglobovima), kao

i eksterne sile i momente u Kartezijanskom prostoru, potrebno je postaviti direktan kinematski, kao i inverzni dinamički model. Direktan kinematski model, koji mapira ugaone položaje zglobova u Kartezijanski položaj završnog uredjaja, može se lako proračunati korišćenjem takozvanih proksimalnih Denavit-Hartenberg parametara [11]. Za inverznu dinamiku koja mapira zglobne ugaone pozicije, brzine, ubrzanja, zajedno sa eksternim silama i momentima, u zglobne momente, korišćen je softverski paket SYMORO+ [12] za automatsko generisanje koda.

Ograničavajući zglobni uglovi kao i maksimalni zglobni momenti koji su neophodni za kasnije proračune, određeni su iz [13].



Slika 1. Ravanski biomehanički model čoveka sa tri stepena slobode

### III. Kvintni Splajn

Ova deonica diskutovane splajn predstavu [14] zglobnih trajektorija.

Pokret čučnja može se zamisliti kao da model počinje iz stajaćeg položaja, zatim spušta kuk ispod određene visine, i vraća se u stajaći položaj. Naša namera je da napravimo algoritam za planiranje pokreta od početnog do krajnjeg položaja, tako da poštuje određena ograničenja i ispunjava određene zahteve, istovremeno minimizirajući neku složenu optimizacionu funkciju.

Kako bismo to uspeali, neophodna nam je matematička predstava za zglobne putanje svih zglobova. Ona mora

biti istovremeno dovoljno ekspresivna kako bi mogla predstaviti sve detalje jedne složene kretanje, ali ne isuviše kompleksna kako bi vreme proračunavanja bili relativno kratko. U ovom radu, opredelili smo se za kvintnu splajn predstavu.

Pretpostavljajući da je  $q$  funkcija vremena koja predstavlja trajektoriju jednog zgloba,

$$q \in \{q_{Članak}, q_{Koleno}, q_{Kuk}\}$$

može se predstaviti preko  $N$  parova vreme-zglobni ugao, koje nazivamo putne tačke:

$$(t_0, q_0^*), (t_1, q_1^*), \dots, (t_N, q_N^*). \quad (1)$$

Ukoliko je u početnom i krajnjem trenutku čovek u stanju mirovanja<sup>1</sup> postoji jedinstvena deo-po-deo polinomska trajektorija petog stepena (kvintna), koja prolazi kroz sve putne tačke i zadovoljava određene uslove glatkosti. Tajektorija se modeluje, između vremena  $t_i$  i  $t_{i+1}$ , kao polinom 5-og stepena izražen na sledeći način

$$q_i(t) = a_i + b_it + c_it^2 + d_it^3 + e_it^4 + f_it^5. \quad (2)$$

Celokupna trajektorija je deo-po-deo kvintna funkcija koja je sastavljena od sleda pojedinačnih kvintnih polinomskih trajektorija.

$$q(t) = \begin{cases} q_0(t), & \text{if } t_0 \leq t < t_1 \\ \vdots \\ q_{N-1}(t), & \text{if } t_{N-1} \leq t < t_N \end{cases} \quad (3)$$

Ukoliko je dat skup putnih tačaka, postoji jedinstveni skup koeficijenata  $\{a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i\}_{i=0, \dots, N-1}$  takvih da konačna trajektorija prolazi kroz sve putne tačke i jeste neprekidna, zajedno sa svojim prvih četiri izvoda, u intervalu vremena  $(t_0, t_N)$ .

Da bi se jedinstveno izračunali ovih  $6N$  koeficijenata, možemo postaviti isti broj linearnih jednačina koje ih sadrže. Da bismo osigurali da svi kvintni polinomi prolaze kroz putne tačke na njihovim krajevima, izjednačavamo ih sa vrednošću funkcije u tim putnim tačkama.

$$q_i(t_i) = q_i^* \quad (4)$$

$$q_i(t_{i+1}) = q_{i+1}^* \quad (5)$$

Svaki pojedinačan kvintni polinom mora proći kroz putne tačke na sopstvenim krajevima, što znači da jednačine (4) i (5) važe za  $i = 0, \dots, N-1$ , i samim tim su odgovorne za  $2N$  jednačina.

Neprekidnost izvoda trajektorije u unutrašnjim putnim tačkama može se osigurati izjednačavanjem izvoda susednih kvintnih polinoma u njihovoj zajedničkoj putnoj tački.

$$\dot{q}_i(t_{i+1}) = \dot{q}_{i+1}(t_{i+1}) \quad (6)$$

$$\ddot{q}_i(t_{i+1}) = \ddot{q}_{i+1}(t_{i+1}) \quad (7)$$

$$\dddot{q}_i(t_{i+1}) = \dddot{q}_{i+1}(t_{i+1}) \quad (8)$$

$$q_i^{(4)}(t_{i+1}) = q_{i+1}^{(4)}(t_{i+1}) \quad (9)$$

<sup>1</sup>Početna i krajnja brzina, kao i ubrzanje, su jednaki nuli.

S obzirom da (6), (7), (8), i (9) važe za  $i = 1, \dots, N - 1$ , i zbog toga su odgovorne za  $4(N - 1)$  jednačina.

Ovom sistemu linearnih jednačina nedostaje samo 4 jednačine da bi bio kvadratan. Preostale jednačine će podstaći to da model čoveka bude u stanju mirovanja na početku i kraju pokreta.

$$\dot{q}_0(t_0) = 0 \quad (10)$$

$$\ddot{q}_0(t_0) = 0 \quad (11)$$

$$\dot{q}_{N-1}(t_N) = 0 \quad (12)$$

$$\ddot{q}_{N-1}(t_N) = 0 \quad (13)$$

Rešavanjem ovog sistema od  $6N$  jednačina sa  $6N$  nepoznatih dobija se jedinstven skup koeficijenata, dakle i jedinstvena deo-po-deo kvintna trajektorija. Štaviše, ovi koeficijenti će linearno zavisiti od vrednosti funkcije u putnim tačkama.

Takodje je vredno pomenuti da izračunavanjem funkcije ili neke od njenih izvoda u nekom vremenu  $t'$  takvom da je  $t_i < t' < t_{i+1}$ , dobija se vrednost koja je linearno zavisna od koeficijenata  $i$ -tog polinoma, a samim tim i od vrednosti funkcije u putnim tačkama.

$$q(t') = a_i + b_i t' + c_i t'^2 + d_i t'^3 + e_i t'^4 + f_i t'^5 \quad (14)$$

Može se zaključiti da će vrednost funkcije  $q(t')$  u bilo kom trenutku u vremenu  $t_0 < t' < t_N$  biti linearno zavisna od vrednosti funkcije u putnim tačkama.

#### IV. Optimizacija

U ovoj deonici biće opisan optimizacioni problem koji se rešava prilikom generisanja trajektorija.

Kao što je pokazano u Deonici III, trajektorija svakog zgloba se može predstaviti korišćenjem  $N$  putnih tačaka. Pretpostavljajući sada da imamo trodimenzionalnu trajektoriju

$$q = [q_{Clanak}, q_{Koleno}, q_{Kuk}]^T$$

i da su putne tačke date za takvu trajektoriju, slično tome kako su date u (1), možemo ih upakovati u optimizacioni vektor

$$x = [q_0^{*T} \quad q_1^{*T} \quad \dots \quad q_N^{*T}]^T$$

gde je svaka od njih vektor  $q_i^* \in \mathbb{R}^3$ ,  $i = 0, \dots, N$ .

Problem pronalaženja najprikadnijih zglobnih trajektorija u skladu sa nekom optimizacionom funkcijom, podešavajući pozicije putnih tačaka u prostoru zglobova, može se formalno predstaviti kao

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & h(x) = 0 \\ & g(x) \leq 0 \end{aligned} \quad (15)$$

gde je  $x \in \mathbb{R}^{3(N+1)}$  optimizaciona promenljiva koja predstavlja vektor putnih tačaka,  $f(x) : \mathbb{R}^{3(N+1)} \mapsto \mathbb{R}$  je optimizaciona funkcija,  $h(x) : \mathbb{R}^{3(N+1)} \mapsto \mathbb{R}^m$  predstavlja ograničenja u vidu sistema jednakosti, a  $g(x) : \mathbb{R}^{3(N+1)} \mapsto \mathbb{R}^p$  predstavlja ograničenja u vidu sistema nejednakosti.

U ovom radu, optimizaciona funkcija predstavlja linearnu kombinaciju skupa optimizacionih funkcija definisane vektorskom funkcijom  $\tilde{f}(x)$ . Optimizaciona funkcija može se izraziti kao

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N_{CF}} \alpha_i f_i(x) = \alpha^T \tilde{f}(x). \quad (16)$$

Gde koeficijenti moraju biti pozitivni  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, N_{CF}$  kako bi se održala lokalna konveksnost funkcija, kao i normalizovani  $\sum_{i=1}^{N_{CF}} \alpha_i = 1$  kako bi svakom rešenju odgovarala jedinstvena linearna kombinacija.

Skup optimizacionih funkcija koje se razmatraju u ovom radu date su u Tabeli I. Dok su ograničenja predstavljena u Tabeli II.

Vrednosti trajektorije, brzine i ubrzanja u pojedinim trenucima ( $q(t')$ ,  $\dot{q}(t')$ ,  $\ddot{q}(t')$ ) mogu se dobiti iz koeficijenata dobijenih pomoću procedure opisane u Deonici III. Kartezijanska pozicija kuka ( $x_{Kuk}$ ,  $y_{Kuk}$ ) može se dobiti pomoću direktnog kinematskog modela. Zglobni momenti  $\Gamma$ , mogu se dobiti pomoću inverznog dinamičkog modela, kao i centar pritiska  $COP$  [15].

Tabela I  
Optimizacione funkcije

Ime	Izraz
Zbir Kvadrata Zglobnih Momenata	$f_1(x) = \sum_{j=1}^6 \sum_{i=0}^{N_S} \Gamma_{ji}^2$
Zbir Kvadrata Zglobnih Ubrzanja	$f_2(x) = \sum_{j=1}^6 \sum_{i=0}^{N_S} \ddot{q}_{ji}^2$
Zbir Kvadrata Zglobnih Snaga	$f_4(x) = \sum_{j=1}^6 \sum_{i=0}^{N_S} (\Gamma_{ji} \cdot \dot{q}_{ji})^2$

Tabela II  
Funkcije ograničenja

Ime	Izraz
Sistemi nejednakosti	
Uslov Stabilnosti	$x_{peta} \leq COP(t_i) \leq x_{prst}, i = 0, \dots, N_{itp}$
Ograničenja Zglobnog Momenta	$\Gamma_{min} \leq \Gamma(t_i) \leq \Gamma_{max}, i = 0, \dots, N_{itp}$
Uslov Čučnja	$y_{Kuk}(t_i) \leq y_{Prag}, i = 0, \dots, N_{itp}$
Zglobna Ograničenja	$q_{min} \leq q(t_i) \leq q_{max}, i = 0, \dots, N_{itp}$
Sistemi jednakosti	
Početni Uslovi	$q(t_0) = q_{uspravno}$
Krajnji Uslovi	$q(t_N) = q_{uspravno}$

#### V. Inverzna Optimizacija

U ovoj deonici biće opisano kako izvršiti inverznu optimizaciju na osnovu Karuš-Kun-Takerovih uslova optimalnosti [7].

Ako je dat rezultat  $x^*$  optimizacionog problema (15) gde je optimizaciona funkcija linearna kombinacija različitih funkcija kao u (16), cilj inverzne optimizacije jeste da

se pronadju koeficijenti  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, N_{CF}$  te linearne kombinacije. Pretpostavljajući da je data snimljena ljudska trajektorija u obliku putnih tački, inverzna optimizacija bi trebalo da odredi koje optimizacione funkcije je čovek koristio prilikom generisanja takve trajektorije, i time nam omogućiti generisanje čovekolikih trajektorija u budućnosti, korišćenjem pronađene optimizacione funkcije.

Koristićemo KKT uslove da rešimo problem inverzne optimizacije. Za svaki optimizacioni problem izražen kao u (15), možemo definisati Lagranžijan uz pomoć promenljivih  $\lambda$  i  $\mu$  koje nazivamo Lagranžovim multiplikatorima.

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda^T \cdot h(x) + \mu^T \cdot g(x) \quad (17)$$

Poznato je da optimalno rešenje  $x^*$  takozvanog primalnog problema (15) mora imati komplementarno dualno rešenje  $(\lambda^*, \mu^*)$ . Zajedno, oni moraju zadovoljavati KKT uslove koji su dati u jednačinama (18)-(22).

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0 \quad (18)$$

$$h(x^*) = 0 \quad (19)$$

$$g(x^*) \leq 0 \quad (20)$$

$$\mu_i^* g_i(x^*) = 0 \quad i = 1, \dots, p \quad (21)$$

$$\mu^* \geq 0 \quad (22)$$

S obzirom na to da je naša optimizaciona funkcija linearna kombinacija skupa funkcija, možemo Lagranžijan izraziti na sledeći način, i uočiti njegovu zavisnost od koeficijenata  $\alpha$  koje želimo povratiti.

$$L(\alpha, x, \lambda, \mu) = \alpha^T \cdot \tilde{f}(x) + \lambda^T \cdot h(x) + \mu^T \cdot g(x) \quad (23)$$

Dakle KKT uslovi zavise od koeficijenata  $\alpha$  ali takodje i od dualnih promenljivih  $(\lambda^*, \mu^*)$  koje nisu date. Naš pristup povratku koeficijenata  $\alpha$  će se zasnivati na zadovoljavanju KKT uslova, a zahtevaće i da pored koeficijenata tražimo vrednost multiplikatora  $(\lambda^*, \mu^*)$ .

Definisaćemo rezidualne kao što je uradjeno u [16].

$$r_{stat} = \nabla_x L(\alpha, x^*, \lambda^*, \mu^*) \quad (24)$$

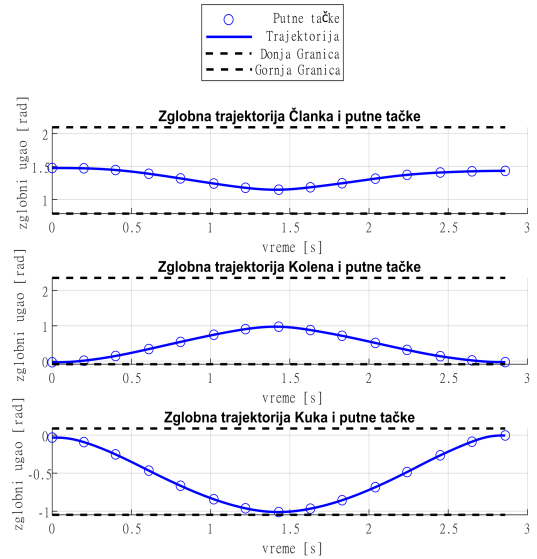
$$r_{comp} = \text{diag}(g(x^*))\mu^* \quad (25)$$

Zatim možemo formulisati želju za zadovoljavanjem KKT uslova kao optimizacioni problem pretrage za promenljivima  $(\alpha, \lambda^*, \mu^*)$  takvim da su reziduali iz (24) i (25), koji odgovaraju uslovima (18) i (21), što bliži nuli a da istovremeno poštuju uslov (22) kao i uslov pozitivnosti i normalizacije koeficijenata  $\alpha$ .

$$\begin{aligned} \min_{(\alpha, \lambda, \mu)} \quad & \|r_{stat}\|_2^2 + \|r_{comp}\|_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & \alpha \geq 0 \\ & \mu \geq 0 \\ & \sum_{i=1}^{N_{CF}} \alpha_i = 1 \end{aligned} \quad (26)$$

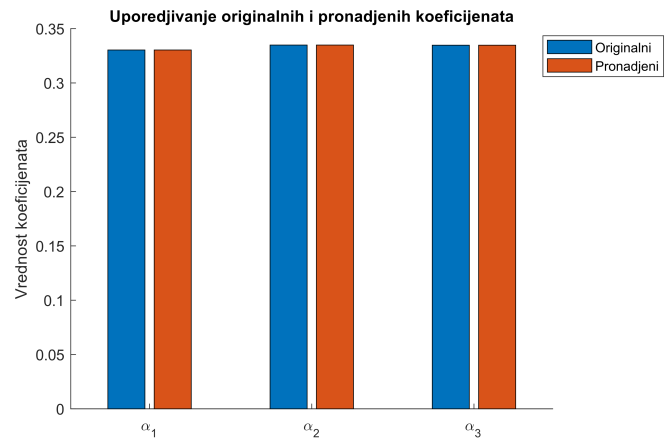
## VI. Rezultati

Optimalne trajektorije generisane su po postupku opisanom u Deonici IV, sa  $N = 15$  putnih tačaka, i sa koeficijentima  $\alpha_1 = \frac{1}{3}$ ,  $\alpha_2 = \frac{1}{3}$  i  $\alpha_3 = \frac{1}{3}$ , koji redom odgovaraju funkcijama zbira kvadrata zglobnih momenata, zbira kvadrata zglobnih ubrzanja, i zbira kvadrata globalnih snaga. Dobijene optimalne putne tačke, kao i odgovarajuće trajektorije dobijene interpolacijom opisanom u Deonici III, prikazane su na Slici 2.



Slika 2. Rezultati optimizacije

Rezultati inverzne optimizacije nad trajektorijama, odnosno putnim tačkama, generisanim sa prethodno pomenutim koeficijentima prikazani su na Slici 3. Na slici su upoređeni koeficijenti koji su iskorišćeni za proces direktne optimizacije sa pronađenim koeficijenti metodom inverzne optimizacije opisane u Deonici V.



Slika 3. Rezultati inverzne optimizacije

Ova dva prikazana grafika predstavljaju uzorak preko koga želimo da pokažemo da metoda radi u simulaciji. Metoda je isprobana za 3D rešetku vrednosti koeficijentata ( $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ) i pokazala je zadovoljavajuće rezultate na svim ispitanim vrednostima.

Generisanje optimalnih trajektorija u industrijskim zadacima potrebno je za procenu ergonomije tog pokreta kod ljudi, i samim tim određivanja nekih pravila izvođenja pokreta kako bi se sprečile ili umanjile mišićno-skeletalne povrede.

Takodje je od značaja mogućnost određivanja principa po kojima se kreću zdravi ljudi, i upoređivanja sa principima po kojima se kreću ljudi sa određenim patologijama, kako bi se mogle davati bolje smernice pacijentima prilikom rehabilitacije.

Budući radovi mogu primenjivati ovu metodu na pravim ljudskim podacima kako bi se pronašle odrednice kojima se ljudi vode prilikom generisanja sopstvenih pokreta. Ova metoda se takodje može primeniti i na drugim pokretima, međjutim morao bi se postaviti drugačiji optimizacioni model, sa ograničenjima koja bi zavisila od samog pokreta.

#### Zahvalnica

Ovo istraživanje podržano je od strane Ministarstva Inostranih Poslova Republike Francuske, i Ministarstva Prosvete, Nauke i Tehnološkog Razvoja Republike Srbije, unutar programa za bilateralnu naučnu saradnju između Republike Francuske i Republike Srbije, projekat #17, HUMAN-COMAN. Ovo istraživanje takodje je podržano od strane Campus France, Francuske agencije za promociju visokog obrazovanja, i internacionalne mobilnosti.

#### Reference

- [1] Erik A Chumacero-Polanco and James Yang. „A review on human motion prediction in sit to stand and lifting tasks”. in: International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. volume 50077. American Society of Mechanical Engineers. 2016, V01AT02A066.
- [2] Ali Leylavi Shoushtari. „What strategy central nervous system uses to perform a movement balanced? Biomechatronical simulation of human lifting”. in: Appl Bionics Biomech 10 (2013), pages 113–124.
- [3] Yujiang Xiang and others. „Human lifting simulation using a multi-objective optimization approach”. in: Multibody System Dynamics 23.4 (2010), pages 431–451.
- [4] Katja Mombaur, Anh Truong and Jean-Paul Laumond. „From human to humanoid locomotion—an inverse optimal control approach”. in: Autonomous robots 28.3 (2010), pages 369–383.
- [5] Sebastian Albrecht, Marion Leibold and Michael Ulbrich. „A bilevel optimization approach to obtain optimal cost functions for human arm movements”. in: Numerical Algebra, Control & Optimization 2.1 (2012), page 105.
- [6] Bastien Berret and others. „Evidence for composite cost functions in arm movement planning: an inverse optimal control approach”. in: PLoS Comput Biol 7.10 (2011), e1002183.
- [7] Arezou Keshavarz, Yang Wang and Stephen Boyd. „Imputing a convex objective function”. in: 2011 IEEE international symposium on intelligent control. IEEE. 2011, pages 613–619.
- [8] Peter Englert, Ngo Anh Vien and Marc Toussaint. „Inverse KKT: Learning cost functions of manipulation tasks from demonstrations”. in: The International Journal of Robotics Research 36.13-14 (2017), pages 1474–1488.
- [9] J Zico Kolter and Andrew Y Ng. „Task-space trajectories via cubic spline optimization”. in: 2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation. IEEE. 2009, pages 1675–1682.
- [10] Raphaël Dumas and Janis Wojtusch. Estimation of the Body Segment Inertial Parameters for the Rigid Body Biomechanical Models Used in Motion Analysis. In: Müller B., Wolf S.(eds) Handbook of Human Motion. 2018.
- [11] Harvey Lipkin. „A note on Denavit-Hartenberg notation in robotics”. in: International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. volume 47446. 2005, pages 921–926.
- [12] Wisama Khalil and Denis Creusot. „SYMORO+: a system for the symbolic modelling of robots”. in: Robotica 15 (1997), pages 153–161.
- [13] Thomas Robert, Julien Causse and Gérard Monnier. „Estimation of external contact loads using an inverse dynamics and optimization approach: general method and application to sit-to-stand maneuvers”. in: Journal of biomechanics 46.13 (2013), pages 2220–2227.
- [14] Sky McKinley and Megan Levine. „Cubic spline interpolation”. in: College of the Redwoods 45.1 (1998), pages 1049–1060.
- [15] Philippe Sardain and Guy Bessonnet. „Forces acting on a biped robot. Center of pressure-zero moment point”. in: IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans 34.5 (2004), pages 630–637.
- [16] Adina Panchea. „Inverse optimal control for redundant systems of biological motion”. phdthesis. Université d’Orléans, 2015.