Inženjerska indukcija – predlog definicije i jedna potvrda predloga

Bojan Vujičić, Boris Ličina, Platon Sovilj, Vladimir Vujičić

***Apstrakt* — U radu se predlaže definicija novog inženjerskog pojma nazvanog inženjerska indukcija. Predlog je primenjen u istraživanjima optimalne strukture uređaja za merenje snage i energije vetra i pokazao je svoju efikasnost i primenljivost.**

***Ključne reči* — matematička indukcija; deduktivni dokaz, induktivni dokaz; inženjerska indukcija.**

I. UVOD

PRE nego što izložimo osnovnu ideju ovog rada, važno je istaći da za matematičku idukciju nije "zaslužna" konkretna ličnost, niti je nastala konkretnog datuma. Ona je nastala kao posledica mnogobrojnih radova različitih matematičara, i ne samo matematičara, već i naučnika iz heterogenih naučnih disciplina. Najraniji tragovi matematičke indukcije sežu još u Euklidove *Elemente*, u treći vek p.n.e. Ovom prilikom se nećemo upuštati u dublje istorijske detalje njenog nastanka, ali ćemo spomenuti da se prva konkretna formulacija matematičke indukcije sreće kod Paskalovog rešenja aritmetičkog trougla 1654. godine.

Tekst koji sledi nema pretnziju da u bilo kom segmentu umanji značaj matematičke indukcije. Naprotiv, na ovom konkretnom primeru, princip "inženjerske" indukcije se pokazuje kao samo jedan od praktičnih načina za brže, a jednako korektno, rešenje problema koji se pred autore postavio. Tim pre, što se ponuđeno rešenje ima veoma jednostavnu potvrdu kroz hardversku realizaciju prikazanu u jednom od ranijih radova [1]. U ovom konkretnom slučaju prikazano je opšte rešenje "inženjerskom" indukcijom i opštim deduktivnim postupkom i na taj način izvršena potvrda tvrdnje na oba načina.

Ovaj rad nastao je iz inženjerske prakse, kao potreba da se na egzaktan, inženjerski i logički korektan način, ali lišen strogih pravila matematičke indukcije, na jednostavniji način reši jedan konkretan inženjerski problem. Opšte je poznata činjenica da su inženjeri u svojoj praksi često suočeni sa potrebom da nađu konkretno rešenje za svakodnevne izazove sa kojima se susreću u svom okruženju. Neretko, potreba za rešenjem je vremenski limitirana, pa se u takvim okolnostima pribegava različitim pristupima koji dovode do kvalitetnog i korektnog rešenja. Takav pristup ima svoje dobre i loše strane. Dobra stvar je što se brže dolazi do rešenja konkretnog problema, a loša stvar je što se uglavnom ne vodi računa o uopštavanju rešenja i njegovoj generalizaciji, o "široj slici".

Za razliku od ovog pristupa matematičari nastoje da objedine što veći broj problema u jedan opšti i da ponude njegovo rešenje, bez ulaženja u inženjersku suštinu da li je to nekome stvarno potrebno i hoće li ovakvo rešenje imati široku primenu u praksi. Imajući ovo u vidu, prilikom rešenja jednog konkretnog problema, nastao je ovaj rad kao težnja da "pomiri" ova dva, samo naizgled, oprečna pristupa. Da pokaže kako oba pristupa dovode do korektnog rešenja, da ne isključuju jedan drugog, već, naprotiv, da jedan drugog podupiru u zajedničkom cilju [2].

II. PROBLEM MERENJA SREDNJE VREDNOSTI PROIZVODA N NEPREKIDNIH SIGNALA

Pretpostavimo da se, tokom vremenskog intervala T, proizvod k signala meri korišćenjem dvobitne statističke digitalne merne metode (SDMM). U tom slučaju će izlazna vrednost množača koju u stvari generiše $(k-1)$ - binarni množač biti jednaka:

$$\bar{\Psi}(\mathrm{k}) = \frac{1}{\mathrm{N}} \cdot \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \Psi_1(\mathrm{i}) \cdot \Psi_2(\mathrm{i}) \dots \cdot \Psi_{\mathrm{k}}(\mathrm{i}) = \frac{1}{\mathrm{T}} \cdot \int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{f}_1(\mathrm{t}) \cdot \mathrm{f}_2(\mathrm{t}) \dots \cdot \mathrm{f}_{\mathrm{k}}(\mathrm{t}) \cdot \mathrm{dt} \qquad (1)$$

gde su $\Psi_1(\mathrm{i}), \Psi_2(\mathrm{i}), \dots \Psi_{\mathrm{k}}(\mathrm{i})$ digitalizovane vrednosti k ulaznih signala i gde $\mathrm{N} \to \infty$ označava neograničen broj uzoraka (uzrokovanih neograničenom frekvencijom uzorkovanja) u vremenskom intrevalu T. Navedimo sada sledeću **teoremu:** Pretpostavimo da je $\sigma_{\bar{e}}^2(k) = \sigma_e^2(k)/N$ varijansa srednje greške merenja e proizvoda k signala merenih dvobitnom SDMM u vremenskom intervalu *[0, T]*. Ako sa $+g$ i $-g$ označimo naposke pragove odlučivanja dvobitnog AD konvertora tada, za konačnu frekvenciju uzorkovanja, pa time i ograničenu vrednost uzoraka N, možemo pisati:

Bojan Vujičić – Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 6, 21000 Novi Sad, Srbija (e-mail: bojanvuj@uns.ac.rs).

Boris Ličina – Univerzitet Privredna Akademija Novi Sad, Fakultet za primenjeni menadžment, ekonomiju i finansije, Jevrejska 24/1, 11000 Beograd (e-mail: boris.licina@yahoo.com).

Platon Sovilj – Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 6, 21000 Novi Sad, Srbija (e-mail: platon@uns.ac.rs).

Vladimir Vujičić – Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 6, 21000 Novi Sad, Srbija (e-mail: vujicicv@uns.ac.rs).

$$\sigma_{\bar{e}}^2(k) = \frac{1}{N} \cdot \left[\frac{(2g)^k}{T} \cdot \int_0^T |f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot \ldots \cdot f_k(t)| \cdot dt - \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f_1^2(t) \cdot f_2^2(t) \cdot \ldots \cdot f_k^2(t) dt \right] \quad (2)$$

Dokaz: Umesto strogog i dugog deduktivnog dokaza, dajemo jednostavnu analizu (**u duhu matematičke indukcije**) koja potvrđuje opštu formulu (2).

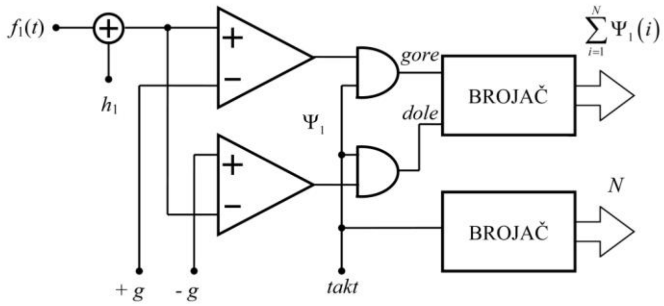
Korak 1: Za $k = 1$, izlazna vrednost je jednaka:

$$\Psi = f_1(t) + e \quad (3)$$

a varijansa srednje greške je izražena sa:

$$\sigma_{\bar{e}}^2(1) = \frac{1}{N} \cdot \left[\frac{2g}{T} \cdot \int_0^T |f_1(t)| \cdot dt - \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f_1^2(t) \cdot dt \right] \quad (4)$$

Hardverska realizacija slučaja za $k = 1$, gde se ulaznom signalu $f_1(t)$ superponira diterski signal h_1, kako je to prikazano na Slici 1.



Sl. 1. Blok dijagram uređaja za merenje srednje vrednosti ulaznog signala.

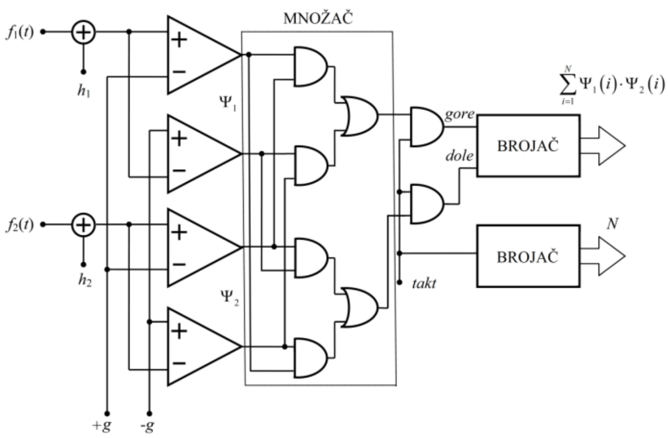
Korak 2: Za $k = 2$, izlazna vrednost je jednaka:

$$\Psi = f_1(t) \cdot f_2(t) + e \quad (5)$$

a varijansa srednje greške je izražena sa:

$$\sigma_{\bar{e}}^2(2) = \frac{1}{N} \cdot \left[\frac{(2g)^2}{T} \cdot \int_0^T |f_1(t) \cdot f_2(t)| \cdot dt - \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f_1^2(t) \cdot f_2^2(t) \cdot dt \right] \quad (6)$$

Hardverska realizacija slučaja za $k = 2$, gde se ulaznim signalima $f_1(t)$ i $f_2(t)$ superponiraju međusobno nekorelisani diterski signali h_1 i h_2, respektivno, prikazana je na Slici 2.



Sl. 2. Blok dijagram uređaja za merenje proizvoda dva ulazna signala.

Korak 3: Primetimo da se izrazi (5) i (6) mogu zapisati kao:

$$\sigma_{\bar{e}}^2(1) = \frac{1}{N} \cdot \left[\frac{(2g)^0 \cdot 2g}{T} \cdot \int_0^T |1| \cdot |f_1(t)| \cdot dt - \frac{1}{T} \cdot \int_0^T [1^2 \cdot f_1^2(t)] \cdot dt \right] \quad (7)$$

i

$$\sigma_{\bar{e}}^2(2) = \frac{1}{N} \cdot \left[\frac{(2g)^1 \cdot 2g}{T} \cdot \int_0^T |f_1(t)| \cdot |f_2(t)| \cdot dt - \frac{1}{T} \cdot \int_0^T [f_1^2(t) \cdot f_2^2(t)] \cdot dt \right] \quad (8)$$

Pored toga, primetimo da, za bilo koji $k \geq 1$, prilikom dodavanja sledeće funkcije i sledećeg množača vredi:

a) prvi integral je pomnožen sa $2 \cdot g$,

b) funkcija unutar prvog integrala množi se sa apsolutnom vrednošću sledeće funkcije,

c) funkcija unutar drugog integrala množi se sa kvadratom sledeće funkcije.

Korak 4: Pretpostavimo da je teorema tačna za neko k, te da važe pretpostavke a), b) i c). Ostaje da pokažemo da važi i za $k + 1$.

$$\sigma_{\bar{e}}^2(k+1) = \frac{1}{N} \left[\frac{(2g)^k \cdot 2g}{T} \int_0^T |f_1(t) f_2(t) \ldots f_k(t)| \cdot |f_{k+1}(t)| \cdot dt - \frac{1}{T} \int_0^T [f_1^2(t) f_2^2(t) \ldots f_k^2(t)] \cdot f_{k+1}^2(t) dt \right] \quad (9)$$

Kad se navedene operacije izvrše, dobijamo:

$$\sigma_{\bar{e}}^2(k+1) = \frac{1}{N}\left[\frac{(2g)^{k+1}}{T}\int_0^T |f_1(t)\cdot f_2(t)\cdot \ldots \cdot f_{k+1}(t)|\cdot dt - \frac{1}{T}\int_0^T [f_1^2(t)\cdot f_2^2(t)\cdot \ldots \cdot f_{k+1}^2(t)]\cdot dt\right] \quad (10)$$

čime je teorema dokazana.

Primetimo da je dokaz "u duhu matematičke indukcije" ali da nije matematička indukcija. Autori su skloni da ovaj primenjeni postupak nazovu "inženjerska indukcija" i da ga u daljim istraživanjima detaljnije uopšte i formalizuju.

III. Deduktivna Potvrda

Dokažimo deduktivno formulu za varijansu srednje greške merenja proizvoda k signala dvobitnom SDMM. To ćemo uraditi u pet koraka, kao je to niže prikazano.

Korak 1: M_3 je konačan:

$$M_3 = \overline{(e-\bar{e})^3} \quad (11)$$

Može se strogo dokazati da važi $M_3 \le (2g)^{3k}$ odnosno da je treći centralni momenat slučajne greške e konačan (ograničen) i da to važi za svaki konačan prirodan broj k $(k \ge 1)$.

Korak 2: Pošto je M_3 konačan [3] važi:

$$\sigma_{\bar{e}}{}^2 = \frac{\sigma_e^2}{N} \quad (12)$$

Korak 3: $\sigma_e^2 = ?$

Trenutna vrednost proizvoda k ulaznih signala je deterministička veličina a trenutna vrednost greške merenja e je slučajna veličina. Prema tome, one su međusobno statistički nezavisne pa je:

$$\Psi = y_1\cdot y_2\cdot \ldots y_k + e$$
$$\sigma_\Psi^2 = \sigma_{y_1 y_2 \cdots y_k}^2 + \sigma_e^2$$
$$\sigma_e^2 = \sigma_\Psi^2 - \sigma_{y_1 y_2 \cdots y_k}^2 \quad (13)$$

Po definiciji je varijansa proizvoda k signala na vremenskom intervalu T data sa:

$$\sigma_{y_1 y_2 \cdots y_k}^2 = \frac{1}{T}\cdot\int_0^T f_1^2(t)\cdot f_2^2(t)\cdot \ldots \cdot f_k^2(t)\cdot dt - \left[\frac{1}{T}\cdot\int_0^T f_1(t)\cdot f_2(t)\cdot \ldots \cdot f_k(t)\cdot dt\right]^2 \quad (14)$$

Sa druge strane je:

$$\sigma_\Psi^2 = \overline{\Psi^2} - \overline{\Psi}^2 \quad (15)$$

Korak 4: Čemu je jednaka srednja vrednost izlaza fleš AD konvertora: $\overline{\Psi} = ?$ Zapišimo sledeći simbolički integral:

$$\overline{\Psi} = \int_{-(2g)^k}^{+(2g)^k} \Psi\cdot dP_\Psi \quad (16)$$

gde je:

$$\Psi = \Psi_1\cdot\Psi_2\cdot \ldots \Psi_k \quad (17)$$

a dP_Ψ elementarna verovatnoća da se Ψ desi:

$$dP_\Psi = dP_{y_1/t}\cdot dP_{y_2/t}\cdot \ldots \cdot dP_{y_k/t}\cdot \cdot dP_t\cdot dP_{h_1}\cdot dP_{h_2}\cdot \ldots \cdot dP_{h_k} \quad (18)$$

Kako je:

$$dP_{y_i/t} = \delta[y_i - f_i(t)]\cdot dy_i, \quad za \quad i = 1,2,\ldots k \quad (19)$$

$$dP_t = \frac{1}{t_2 - t_1}\cdot dt \quad (20)$$

$$dP_{h_i} = \frac{1}{2\cdot g}\cdot dh_i, \quad za \quad i = 1,2,\ldots k \quad (21)$$

konačno dobijamo:

$$\overline{\Psi} = \frac{1}{t_2-t_1}\cdot\int_{t_1}^{t_2} dt\cdot\int_{-2g}^{+2g}\delta[y_1 - f_1(t)]\cdot dy_1\cdot \cdot\int_{-2g}^{+2g}\delta[y_2 - f_2(t)]\cdot dy_2\cdot\ldots\cdot\int_{-2g}^{+2g}\delta[y_k - f_k(t)]\cdot dy_k\cdot \cdot\int_{-g}^{+g}\Psi_1\frac{dh_1}{2g}\cdot\int_{-g}^{+g}\Psi_2\frac{dh_2}{2g}\cdot\ldots\cdot\int_{-g}^{+g}\Psi_k\frac{dh_k}{2g} \quad (22)$$

Lako se pokazuje [4] da je za $y_i = const.$:

$$\int_{-g}^{+g}\Psi_i\frac{dh_i}{2g} = y_i, \quad za \quad i = 1,2,\ldots k \quad (23)$$

pa se gornji integral na kraju svodi na:

$$\overline{\Psi} = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot \ldots \cdot f_k(t) \cdot dt \qquad (24)$$

Korak 5: $\overline{\Psi^2} = ?$

Lako se pokazuje da u dvobitnoj SDMM generalno važi:

$$\Psi_i^l = (\operatorname{sgn} \Psi_i)^l \cdot (2g)^{l-1} \cdot |\Psi_i| \qquad (25)$$

gde je *l* končan prirodan broj.

Za $l = 2$ što je naš slučaj $\Psi_i^2 = (2g) \cdot |\Psi_i|$, pa je:

$$\Psi^2 = \Psi_1^2 \cdot \Psi_2^2 \cdot \ldots \Psi_k^2 = \\ = (2g)^k \cdot |\Psi_1| \cdot |\Psi_2| \cdot \ldots |\Psi_k| = (2g)^k \cdot |\Psi| \qquad (26)$$

a srednja vrednost od Ψ^2 je:

$$\overline{\Psi^2} = (2g)^k \cdot \overline{|\Psi|} \qquad (27)$$

Ponavljajući gore navedenu proceduru, dobija se:

$$\overline{\Psi^2} = (2g)^k \cdot \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} |f_1(t)| \cdot |f_2(t)| \cdot \ldots \cdot |f_k(t)| \cdot dt \qquad (28)$$

pa je najzad:

$$\sigma_e^2 = \frac{(2g)^k}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} |f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot \ldots \cdot f_k(t)| \cdot dt \\ - \left[\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot \ldots \cdot f_k(t) \cdot dt\right]^2 \\ - \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_1^2(t) \cdot f_2^2(t) \cdot \ldots \cdot f_k^2(t)] \cdot dt \\ + \left[\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot \ldots \cdot f_k(t) \cdot dt\right]^2 \qquad (29)$$

i konačno je:

$$\sigma_{\bar{e}}^2 = \frac{1}{N} \cdot \left\{\frac{(2g)^k}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} |f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot \ldots \cdot f_k(t)| \cdot dt \right. \\ \left. - \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} [f_1^2(t) \cdot f_2^2(t) \cdot \ldots \cdot f_k^2(t)] \cdot dt\right\} \qquad (30)$$

što je i trebalo dokazati.

IV. ZAKLJUČAK

U radu su prikazana dva načina izvođenja opšte formule za grešku merenja srednje vrednosti proizvoda k neprekidnih analognih signala primenom SDMM. Jedan način je primenom novog induktivnog pristupa koji su autori nazvali inženjerska indukcija a drugi je generalni deduktivni način. Dobijena opšta formula u oba slučaja je identična i ima dalekosežne posledice i primenu. Jedna već ostvarena primena je u vrlo tačnom merenju energije vetra anemometrom sa šoljicama. Druga već ostvarena primena je u merenju temperature Pt100 senzorom u nelinearnom režimu.

Autori još traže opštu formalnu definiciju pojma inženjerske idukcije i otvoreni su za diskusiju i dopunu formalnog postupka primenjenog u ovom radu.

ZAHVALNICA

Ovaj rad je podržan od strane Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja kroz institucionalno finansiranje naučno-istraživačkog rada na Fakultetu tehničkih nauka Univerziteta u Novom Sadu.

LITERATURA

[1] Vujicic, V., Župunski, I., Milovancev, S. “Predetermination of the quantization error in digital measurement systems”, IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement, vol. 46, pp. 439-441, April 1997.

[2] Doktorska disertacija: Metoda merenja snage i energije vetra zasnovana na merenju na intervalu, Boris Ličina – 2020, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

[3] V. Vranić, Probability and statistics. Zagreb: Tehnička knjiga. 1965. (in Croatian).

[4] M. Urekar et al., “Accuracy Improvement of the Stochastic Digital Electrical Energy Meter,” Measurement, vol. 98, pp. 139-150, Feb. 2017.

ABSTRACT

The paper proposes a definition of a new engineering concept called engineering induction. The proposal was applied in research of the optimal structure of devices for measuring wind power and energy and showed its efficiency and applicability.

Engineering induction - proposal of definition and one confirmation of proposal

Bojan Vujičić, Boris Ličina, Platon Sovilj, Vladimir Vujičić