

Algoritam generisanja dvobitnih diterovanih Furijeovih bazisnih funkcija

J. Đorđević Kozarov, A. Juhas, P. Sovilj, *Member, IEEE*, V. Vujičić

Apstrakt — U radu je definisan algoritam generisanja dvobitnih diterovanih Furijeovih bazisnih funkcija (DDFBF) koje se koriste u SDDFT procesoru. Teorijski i eksperimentalno je potvrđena njihova ortonormiranost sto je prikazano u radu.

Ključne reči — Furijeova transformacija; Stohastika; Diter; Stohastička digitalna merna metoda.

I. UVOD

ORTOGONALNE transformacije imaju veliki značaj u merenjima i obradi signala, a najstarija i najviše korišćena je Furijeova. Posebno je značajna brza Furijeova transformacija (FFT) zbog velike redukcije broja neophodnih množenja (najkritičnije aritmetičke operacije) i memorije za njeno izvršenje.

Napredak tehnologije računarskih komponenti, posebno što se tiče brzine procesora i kapaciteta memorije, postepeno ističu u prvi plan i DFT kao alternativu koja ima nekoliko prednosti u odnosu na FFT:

- Koeficijenti Furijeovog razvoja se izračunavaju međusobno nezavisno i, po potrebi, pojedinačno;
- Izračunavanje može da se vrši istovremeno sa odmeravanjem – kad se završi sekvenca i DFT može da bude završena;
- Jednostavna je paralelizacija u izračunavanju DFT.

Nijednu od gore nabrojanih osobina nema FFT.

Najnoviji razvoj u primeni DFT u merenjima snage i energije u elektrodistributivnoj (ED) mreži je doveo do realizacije namenskog stohastičkog digitalnog DFT (SDDFT) procesora čija je optimalna verzija – dvobitni SDDFT procesor [1].

Ključna operacija, MAK (Multiply and Accumulate), se sada izvršava jednostavno na jednostavnom hardveru – množač se sastoji od 4 dvoulazna „i“ kola i dva dvoulazna „ili“ kola, dok je akumulator – običan „up/down“ brojač. Jednostavna struktura hardvera za izvršavanje dvobitne MAK operacije, posebno ako se primeni u FPGA realizaciji SDDFT procesora, omogućuje visoku paralelizaciju izračunavanja DFT i time postizanja velikih brzina obrade analiziranog signala. Sa druge strane, i dvobitna stohastička digitalna A/D konverzija (SAADK) je izuzetno jednostavna, tako da su i paralelna merenja jednostavna [2].

Jelena Đorđević Kozarov – Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu, Aleksandra Medvedeva 14, 18000 Niš, Srbija (e-mail: kozarov@elfak.ni.ac.rs).

Atila Juhas – Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 6, 21000 Novi Sad, Srbija (e-mail: atila@uns.ac.rs).

U Literaturi [1] je dokazano da je u slučaju primene dvobitne SAADK optimalno primeniti dvobitne diterovane Furijeove bazisne funkcije. Problem generisanja dvobitnih diterovanih Furijeovih bazisnih funkcija (DDFBF) nije detaljnije elaboriran. Kod SDDFT visokog reda (preko 1000) taj problem postaje kritičan i zahteva posebnu pažnju.

II. ALGORITAM GENERISANJA DVOBITNIH BAZISNIH FUNKCIJA (AGDBF)

1. U memoriji su odmerci Furijeovih bazisnih funkcija (FBF) u floating-point formatu (FP). Treba ih pretvoriti u celobrojni format (CF). Biramo broj bita celobrojnog formata – recimo 32 bita.
2. Pošto je jedan bit – bit znaka – izabrani odmerak FBF u FP formatu množimo sa 2^{31} , primenjujemo funkciju ROUND i smeštamo odmerak u LongInt (LI) formatu. Time smo spremili odmerak FBF za diterovanje.
3. Odgovarajući odmerak uniformnog šuma (UŠ) onda ima 31 bit, a dobijamo ga iz funkcije Random u FP formatu u opsegu (0,1),
4. Od odmerka UŠ oduzmemo 0,5 u FP formatu, pomnožimo sa 2^{30} i primenimo funkciju ROUND.
5. Celobrojno saberemo ta dva celobrojna odmerka. Rezultat ima 31 bit + bit znaka.
6. Detektujemo bit znaka u zbiru i primenimo na rezultat funkciju ABS.
7. Ako je najznačajniji bit apsolutne vrednosti zbira 1, apsolutna vrednost odgovarajuće vrednosti dvobitne FBF je 1, a ako nije – onda je apsolutna vrednost dvobitne FBF jednaka nuli (0).
8. Na apsolutnu vrednost dvobitne FBF se vrati bit znaka i imamo kompletan dvobitni odmerak diterovane FBF.
9. Kompletan dvobitni digitalni odmerak FBF (DDFBF) dalje koristimo u Furijerovom razvoju.

III. EKSPERIMENTALNA POTVRDA ORTONORMIRANOSTI DDFBF

U radu [3] je strogo dokazana relacija (1):

$$\sigma_e^2(2) = \frac{1}{N} \cdot \frac{(2g)^2}{T} \int_0^T |f_1(t) \cdot f_2(t)| dt -$$

Platon Sovilj – Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 6, 21000 Novi Sad, Srbija (e-mail: platon@uns.ac.rs).

Vladimir Vujičić – Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 6, 21000 Novi Sad, Srbija (e-mail: vujiciv@uns.ac.rs).

$$-\frac{1}{N} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T f_1^2(t) \cdot f_2^2(t) dt \quad (1)$$

$\sigma_{\bar{e}}$ je preciznost merenja srednje vrednosti proizvoda dve funkcije, $y_1 = f_1(t)$ i $y_2 = f_2(t)$, dvobitnom SDMM na vremenskom intervalu $[0, T]$. U ED mreži, T je perioda mrežnog napona.

Normiranost DDFBF funkcija je eksperimentalno potvrđena, što je prikazano na slici 1. Teorijsko σ na toj slici je, zapravo, $\sigma = \sigma_{\bar{e}}(2)$ za $g=1$, $f_1(t) = f_2(t) = \sin(n\omega t)$ ili $\cos(n\omega t)$, $\{n = 1, 2, \dots, 32\}$, na 50 Hz sa 2048 semplova po periodi, tj. $N = 2048$. $\sigma_{\bar{e}}$ je usrednjeno σ na kompletnom ansamblu od 64 norme u 236800000 tačaka na vremenskoj osi. \bar{e} je srednja vrednost greške svakog proizvoda odmeraka u 236800000 tačaka.

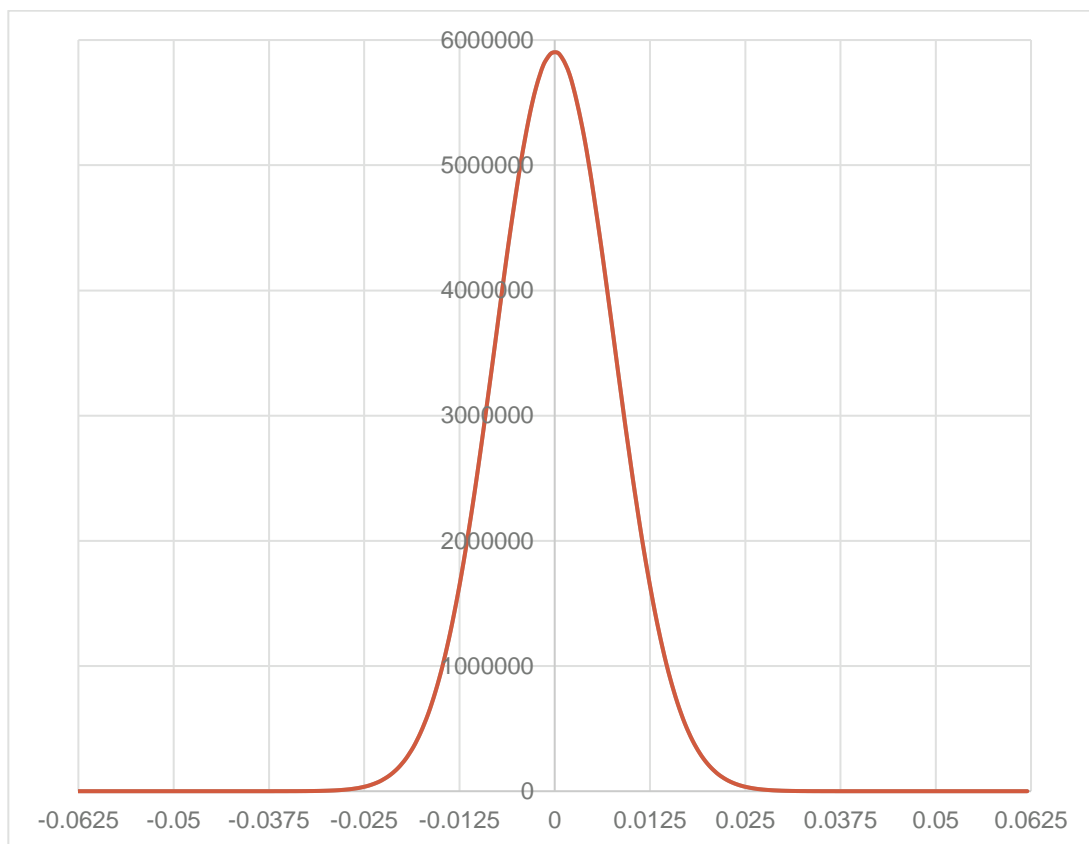
Ortogonalnost DDFBF funkcija je eksperimentalno potvrđena, što je prikazano na slici 2. Teorijsko σ na toj slici je,

zapravo, $\sigma = \sigma_{\bar{e}}(2)$ za $g=1$, $f_1(t) = \sin(n\omega t)$, $f_2(t) = \sin(m\omega t)$ ili $f_1(t) = \cos(n\omega t)$, $f_2(t) = \cos(m\omega t)$, $n, m \in \{1, 2, \dots, 32\}$ i $n \neq m$ na 50 Hz, sa 2048 semplova po periodi, tj. $N = 2048$. $\sigma_{\bar{e}}$ je usrednjeno σ na kompletnom ansamblu od $2 \cdot \left[\binom{32}{2} - 32 \right] = 1742$ ortogonalne kombinacije u 236800000 tačaka na vremenskoj osi. \bar{e} je srednja vrednost grešaka svakog proizvoda odmeraka u 236800000 tačaka.

Ortogonalnost DDFBF funkcija je eksperimentalno potvrđena, što je prikazano na slici 3. $\sigma = \sigma_{\bar{e}}(2)$ za $g=1$, $f_1(t) = \sin(n\omega t)$, $f_2(t) = \cos(m\omega t)$, $n, m \in \{1, 2, \dots, 32\}$ i $n \neq m$, na 50 Hz, sa 2048 semplova po periodi, tj. $N = 2048$. Ovdje, $\sigma_{\bar{e}}$ je usrednjeno σ na kompletnom ansamblu od $64^2 - 2 \cdot \left[\binom{32}{2} - 32 \right] - 64 = 2290$ ortogonalnih kombinacija u 236800000 tačaka na vremenskoj osi, dok je \bar{e} srednja vrednost grešaka svakog proizvoda odmeraka u 236800000 tačaka.

TABELA I
NUMERIČKA POTVRDA NORMIRANOSTI DDFBF

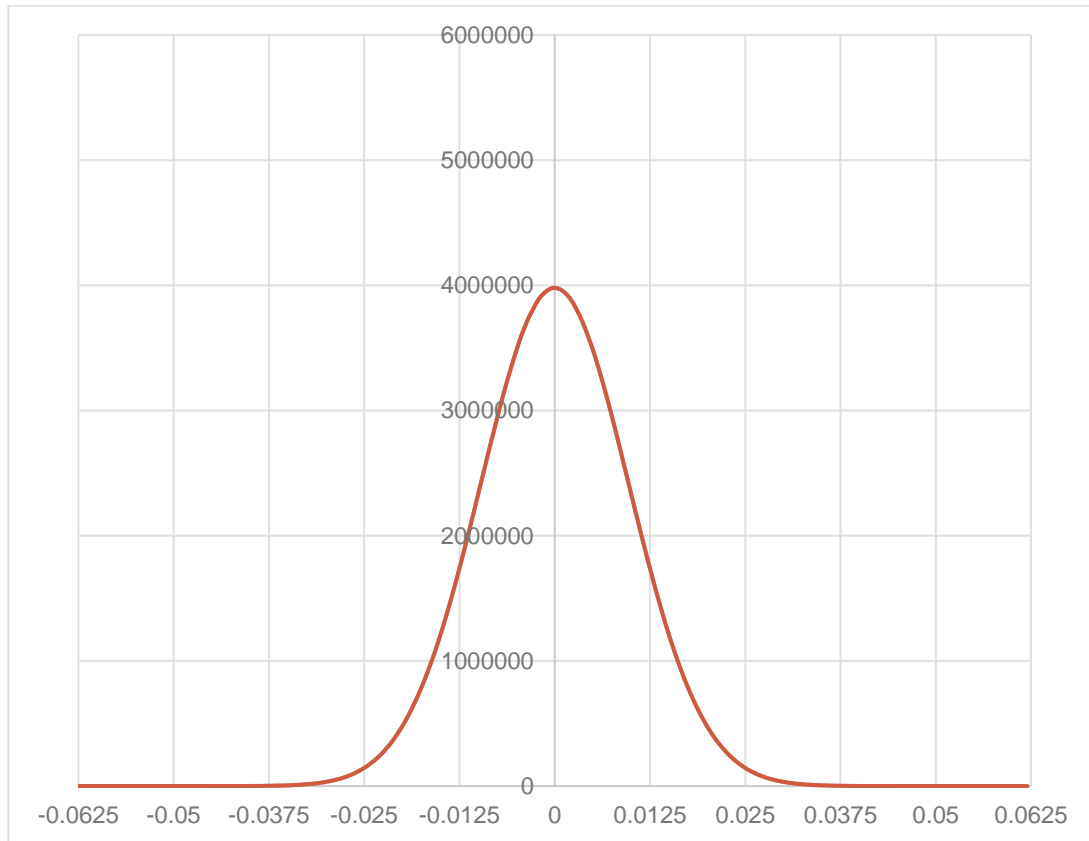
Broj semplova	Slučaj	Teorijsko σ formula	Teorijska vrednost σ	Eksperimentom dobijeno σ	$\frac{\sigma}{\sigma_{\bar{e}}}$	\bar{e}	$\frac{\bar{e}}{\sigma_{\bar{e}}}$	Broj tačaka
2048	a)	$\sigma_{\bar{e}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{N}} = \sqrt{\frac{1}{8N}}$	0.0078125	0.007814339	1.000235375	-5.37027E-07	-6.87394E-05	236800000



Sl.1. Grafička potvrda normiranosti DDFBF

TABELA II
NUMERIČKA POTVRDA ORTOGONALNOSTI DDFBF - 1

Broj semplova	Slučaj	Teorijsko σ formula	Teorijska vrednost σ	Eksperimentom dobijeno σ	$\frac{\sigma}{\sigma_{\bar{e}}}$	\bar{e}	$\frac{\bar{e}}{\sigma_{\bar{e}}}$	Broj tačaka
2048	b)	$\sigma_{\bar{e}} = \sqrt{\frac{8}{\pi} - 1} \cdot \sqrt{\frac{1}{8N}}$	0.009715431	0.009713238	0.999774324	-6.28933E-07	1984000005	236800000



Sl. 2. Grafička potvrda ortogonalnosti DDFBF - 1.

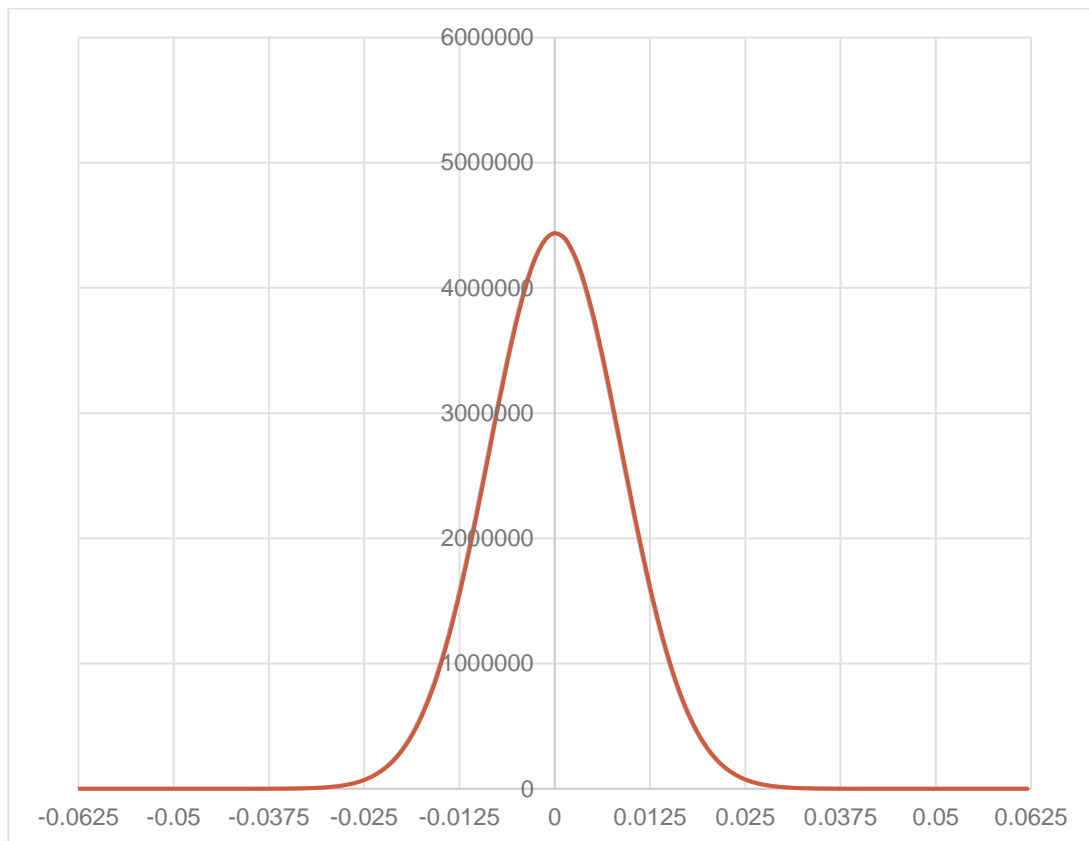
IV. ZAKLJUČAK

U radu je definisan algoritam generisanja digitalnih dvobitnih Furijeovih bazisnih funkcija (DDFBF). Na osnovu teorijskog kriterijuma granične preciznosti norme i ortogonalnosti, eksperimentalno je potvrđena ortonormiranost DFT sa 32 harmonika. Time je teorijski i eksperimentalno

dokazana korektnost opisanog algoritma generisanja. Eksperiment je bio vrlo detaljan i sveobuhvatan i za normiranost i za oba tipa ortogonalnosti. Izveden je u po 236800000 tačaka u svakoj od tri varijante ortonormiranosti. Slaganje teorijske i eksperimentalne preciznosti je vrlo prihvatljivo i sa velikom pouzdanošću stoji tvrdnja da je predloženi algoritam generisanja DDFBF – korektan.

TABELA III
NUMERIČKA POTVRDA ORTOGONALNOSTI DDFBF - 2

Broj semplova	Slučaj	Teorijsko σ formula	Teorijska vrednost σ	Eksperimentom dobijeno σ	$\frac{\sigma}{\sigma_{\bar{e}}}$	\bar{e}	$\frac{\bar{e}}{\sigma_{\bar{e}}}$	Broj tačaka
2048	c)	$\sigma_{\bar{e}} \leq \sqrt{2} \sqrt{\frac{8}{\pi} - 1} \cdot \sqrt{\frac{1}{8N}}$	0.013739694	0.008708729	0.633837169	1.22603E-04	8.92326E-03	198400000



Sl.3. Grafička potvrda ortogonalnosti DDFBF – 2

ZAHVALNICA

Ovaj rad je podržan od strane Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije.

LITERATURA

- [1] D. Pejic et al., "Stochastic Digital DFT Processor and Its Application to Measurement of Reactive Power and Energy", Measurement, vol. 124, pp. 494-504, Aug. 2018.
- [2] P Sovilj et al. "Synergy and Completeness of Simple A/D Conversion and Simple Signal Processing", J. Phys.: Conf. Ser., vol. 1379, paper no. 012064, July 2019.

- [3] V. Vujicic et al., "Stochastic Measurement of Wind Power using a Two-bit A/D Converter", Measurement, vol. 152, paper no. 107184, Feb. 2020

ABSTRACT

The paper defines an algorithm for generating two - bit dithered Fourier basis functions (DDFBF) used in an SDDFT processor. Theoretically and experimentally their orthonormalization was confirmed, which is shown in the paper.

Algorithm for two-bit dithered Fourier basis functions generating

J. Đorđević Kozarov, A. Juhas, P. Sovilj, V. Vujičić