

# Upravljanje pasivnom krutošću završnog uređaja robota oblikovanjem elipsoida krutosti

Branko Lukić, Nikola Knežević i Kosta Jovanović

**Apstrakt**— Krutost završnog uređaja robota određuje ponašanje robota pri interakciji sa okolinom. Krutost završnog uređaja je najčešće predstavljena preko matrice krutosti čije oblikovanje može da bude neizvodljivo jer roboti ne poseduju dovoljno stepeni slobode da bi se svi elementi u matrice krutosti podesili. To dovodi do primene optimizacije koja balansira između vrednosti elemenata matrice krutosti koji su od interesa za izvršavanje zadatka. U ovom radu je predložen pristup za „offline“ oblikovanje matrice krutosti primenom elipsoida krutosti gde se podešavanjem orijentacije i dužina osa elipsoida oblikuje krutost. Oblikovanje elipsoida ima manje parametara koje je potrebno podesiti u odnosu na matricu krutosti. Predložene su dve kriterijumske funkcije za oblikovanje elipsoida krutost koje eksploatišu kinematičku redundansu robota. Optimalne vrednosti pozicija i krutosti zglobova izračunate su primenom algoritma zasnovanog na SLSQP (engl. *Sequential Least Square Programming*). Nakon dobijanja željenog oblika elipsoida krutosti završnog uređaja robota, pokazana je mogućnost promene volumena elipsoida na željenu vrednost skaliranjem krutosti u zglobovima.

**Gljučne reči**—Elipsoid krutosti, krutost završnog uređaja, pasivna krutost.

## I. UVOD

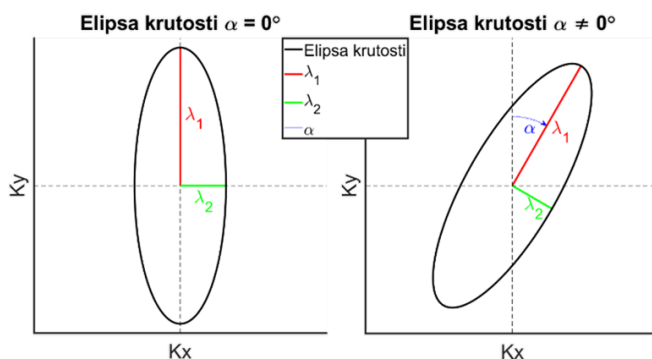
Kod bezbedne fizičke interakcije između čoveka i robota (pHRI) [1, 2] ili robota i okoline, jednu od bitnijih uloga igra popustljivost robota. Pored aktivne popustljivosti [3, 4] koja se ostvaruje kroz upravljačku petlju, postoji i pasivna popustljivost koja se realizuje kroz elastične elemente ugrađene u prenosnom sistemu robota između aktuatora i segmenta robota [5]. Fokus ovog rada je na robote pogonjene aktuatorima sa promenljivom krutošću – VSA (engl. *Variable Stiffness Actuators*), koji imaju dve kontrolne varijable: pozicije i krutosti aktuatora.

Matrica krutosti završnog uređaja je u funkciji pozicija zglobova robota preko Jakobijeve matrice i krutosti zglobova (videti (4) i (5)). To znači da za kinematički redundantnog robota sa popustljivim aktuatorima, krutost završnog uređaja se može oblikovati promenom konfiguracije u nultom prostoru i/ili promenom krutosti zglobova. Za tipične robotske konfiguracije, matrica krutosti

Branko Lukić – Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Bulevar Kralja Aleksandra 73, 11020 Beograd, Srbija (e-mail: branko@etf.rs).

Nikola Knežević – Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Bulevar Kralja Aleksandra 73, 11020 Beograd, Srbija (e-mail: knezevic@etf.rs).

Kosta Jovanović – Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu, Bulevar Kralja Aleksandra 73, 11020 Beograd, Srbija (e-mail: kostaj@etf.rs).



Sl. 1. Elipsa krutosti je definisana dužinama osa  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ , kao i uglom rotacije  $\alpha$ . Levo: Ose elipse krutosti se poklapaju sa osama koordinatnog sistema. Desno: Pravac u kome je elipsa krutosti usmerena je zarotiran za ugao  $\alpha$ .

je simetrična matrica dimenzija  $6 \times 6$ , što rezultuje sa 21 promenljivom. Kontrola matrice krutosti i svih šest pozicija završnog uređaja (3 rotacije i 3 translacije) [6, 7] rezultuje sa 27 promenljivih koje treba podesiti. ), što je sa stanovišta kontrole veoma zahtevno budući da postoji suviše promenljivih i fizičkih ograničenja (ograničen raspon pokreta zglobova i krutosti zglobova) i manjak kontrolnih ulaza. Za kontrolu svih 27 promenljivih veličina robota pogonjenog sa aktuatorima promenljive krutosti minimalan broj aktuatora bi bio 14 [6], ne razmatrajući fizička ograničenja koja postoje i da bi realan broj bio daleko veći i kompleksniji za realizaciju i upravljanje. Stoga, kontrola cele matrice krutosti nije laka, niti je potpuno opravdan cilj [8], već da je kontrola dijagonalnih elemenata matrice krutosti neophodna u većini aplikacija.

Matrica krutosti završnog uređaja ima nelinearnu zavisnost od konfiguracije robota preko Jakobijeve matrice, pa za tipičnog robota sa 6-7 stepeni slobode, nemoguće je pronaći analitički skup pozicija zglobova koji će zadovoljiti željeni položaj završnog uređaja i matricu krutosti. Stoga su neophodne tehnike optimizacije koje koriste nulti prostor [4, 9, 10].

Oblikovanje krutosti završnog uređaja robota računanjem optimalnog seta krutosti u zglobovima za konstantnu poziciju završnog uređaja, gde su krutosti zglobova predstavljen kroz linearni sistem jednačina, a gde je linearnost ostvarena izborom odgovarajuće norme dato je u [6]. Nadogradnja računanja optimalnog seta krutosti u zglobovima prikazana je [7]. U njemu se razmatra iterativna procedura za rešavanje nelinearnih sistema jednačina sa ograničenjima (radni opsezi pozicija i krutosti zglobova). Pristup optimizaciji kretanjem u nultom prostoru može

dovesti do lokalno optimalnog rešenja. Kada se računa optimalna konfiguracija zglobova, projekcija nultog prostora će osigurati glatku putanju zglobova u poređenju sa metodama nelinearne optimizacije koji traže optimalno globalno rešenje koje se može značajno razlikovati od trenutne poze robota [11].

Pristup predložen u ovom radu se zasniva na „offline“ oblikovanju elipsoida krutosti u fazi planiranja trajektorije i krutosti završnog uređaja robota, čijim se oblikovanjem indirektno podešava i matrica krutosti završnog uređaja. Predložene su dve kriterijumske funkcije. Jedna koja ima labaviji kriterijum i jedna sa konzervativnijim kriterijumom.

Struktura rada je sledeća: Nakon uvodnog poglavlja sledi poglavlje II gde je modelirana i opisana priroda matrice krutosti. Poglavlje III opisuje grafičku prezentaciju krutosti preko elipsi i elipsoida krutosti. U poglavlju IV je opisan algoritam za offline planiranje krutosti i pozicije završnog uređaja robota sa simulacionim rezultatima, a u poglavlju V je diskusija i zaključak.

## II. PASIVNA KRUTOST

Lokalna statička karakteristika krutosti zglobova robota se definiše kao negativni izvod momenta po uglu [6, 7]

$$K_j = -\frac{\partial \tau}{\partial q}, \quad (1)$$

gde je  $K_j$  matrica krutosti zglobova,  $\tau$  je vektor momenata koji se razvijaju na zglobovima, a  $q$  je vektor pozicija zglobova. Važi relacija  $\tau = J(q)^T F_{ekst}$ , između Jakobijeve matrice ( $J(q)$ ), eksterne sile koja deluje na završni uređaj robota ( $F_{ekst}$ ) i momenta zglobovima ( $\tau$ ) koji se stvara usled delovanja sile, kao i to da je  $F_{ekst}$  proporcionalno matrici krutosti završnog uređaja  $K_C$  i otklona iz ravnotežnog položaja  $\Delta x$  nastalog usled eksterne sile  $F_{ekst} = K_C \Delta x$ , tako da izraz (1) postaje

$$K_j = -\frac{\partial (J(q)^T K_C \Delta x)}{\partial q} = J(q)^T K_C J(q) - \frac{\partial J(q)^T}{\partial q} K_C \Delta x, \quad (2)$$

gde je  $\partial \Delta x / \partial q = J(q)$ ,  $K_C$  je  $m \times m$  simetrična matrica,  $K_j$  je  $n \times n$  dijagonalne matrice,  $J(q)$  je  $m \times n$  matrica i  $q$  je  $n$ -dimenzionalni vektor pozicija zglobova. Parametri  $m$  i  $n$  su dimenzije radnog prostora i broja zglobova robota. Kada nema otklona od ravnotežnog stanja, tada je  $\Delta x = 0$ , tako da izraz (2) postaje

$$K_j = J(q)^T K_C J(q). \quad (3)$$

Matrica pasivne krutosti zglobova ( $K_j$ ) može da ima nedijagonalnu strukturu sa van dijagonalnim elementima kada se koriste biartikulisani aktuatori [12, 13], gde jedan aktuator pogoni više od jednog segmenta robota, a koji su mehanički veoma komplikovani za realizaciju. Fokus u ovom radu je na uniartikulisanim aktuatorima koji rezultuju da matrica  $K_j$  ima dijagonalnu formu.

Iz jednačine (3) se dobija statička relacija za mapiranje matrice krutosti završnog uređaja robota  $K_C$  u Dekartovim

koordinatama (engl. *Cartesian space*) sa jedne strane i sa druge strane matrice krutosti zglobova  $K_j$  i konfiguraciji robota predstavljene kroz Jakobijevu matricu  $J(q)$  [6, 7] kao

$$K_C = (J(q)K_j^{-1}J(q)^T)^{-1}, \quad (4)$$

odnosno

$$K_C = J(q)^{\dagger T} K_j J(q)^{\dagger}, \quad (5)$$

gde je  $J(q)^{\dagger}$  desna pseudo inverzija Jakobijeve matrice  $J(q)$  za koju važi  $J(q)J(q)^{\dagger} = I$ , gde je  $I$  jedinična matrica. U opštem slučaju pseudo inverzija je definisana kao  $J(q)^{\dagger} = Z^{-1}J(q)^T(J(q)Z^{-1}J(q)^T)^{-1}$ , gde je  $Z$  pozitivno definitivna matrica. Za pravilno mapiranje krutosti u zglobovima i krutosti završnog uređaja metrički tenzor ( $Z$ ) mora imati vrednost matrice krutosti zglobova  $Z = K_j$  [6].

Jednačine (4) i (5) ukazuju da se na krutost i popustljivost završnog uređaja robota može uticati:

- 1) rekonfiguracijom robota kroz nulti prostor kinematički redundantnog robota,
- 2) promenom krutosti zglobova robota pogonjenih sa VSA,
- 3) simultanom rekonfiguracijom i promenom krutosti zglobova robota.

Svi nabrojani načini se mogu primeniti na robote pogonjene sa aktuatorima promenljive krutosti, dok samo rekonfiguracija robota kroz nulti prostor se može primeniti na robote pogonjene aktuatorima sa konstantnom krutošću. Zbog toga eksploatacija redundanse kod robota pogonjenog aktuatorima konstantne krutosti ima veliku važnost.

Česta aproksimacija je da se matrica krutosti podeli na četiri submatrice ( $K_T$  i  $K_R$  su translatorna i rotaciona krutost, dok su  $K_{RT}$  i  $K_{TR}$  matrice kuplovanja), gde su od interesa samo submatrice na glavnoj dijagonali (translatorna i rotaciona), dok se one na sporednoj dijagonali zanemaruju [6]

$$K_C = \begin{bmatrix} K_T & K_{RT} \\ K_{TR} & K_R \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\tilde{K}_C = \begin{bmatrix} K_T & 0 \\ 0 & K_R \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Treba imati na umu da je  $\tilde{K}_C$  aproksimacija koja je lokalno validna.

## III. GRAFIČKA REPREZENTACIJA KRUTOSTI

Za robote koji imaju bilo aktivnu ili pasivnu popustljivost, moguće je sprovesti određene analize koje se tiču performansi robota i krutosti završnog uređaja [14, 15, 9]. Generalno, elipse i elipsoidi daju jednu vrstu aproksimacija koliko i u kom pravcu robot može da razvije krutost, što predstavlja koristan alat u fazi dizajniranja kao i u operativnoj fazi. Elipsoidi imaju veliku primenu u analizi i dizajnu matrice krutosti kod aktivne popustljivosti, gde se kod kinematički redundantnih robota mogu koristiti da se maksimizira radni prostor [14, 15], a da pri tome aktuatori ne budu u zasićenju i željeno ponašanje ne bude narušeno.

Kod aktivne krutosti osim samih elipsoida i politopa moguće je uvesti i region ostvarive krutosti (SFR – engl. *Stiffness Feasibility Region*) koji predstavlja oblik sa nepolitopskim granicama [14].

Kod sila interakcije, bez obrtnih momenata, koje deluju na završni uređaj, ulogu igraju samo elementi matrice translatorne krutosti  $K_T$  koji se odnose na sile odnosno na translatorna kretanja. To je kvadratna simetrična matrica koja ima dimenzije  $3 \times 3$  za trodimenzionalni prostor, ili  $2 \times 2$  u ravanskom prostoru (2D). Kada je u pitanju trodimenzionalni prostor, matrica krutosti se može predstaviti pomoću elipsoida krutosti, ili u slučaju dvodimenzionalnog prostora pomoću elipse krutosti. Radi intuitivnijeg razumevanja na slici 1 je dat prikaz elipse krutosti. Parametri koji opisuju elipsu krutosti su ose elipse  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  (u slučaju elipsoida postoji i  $\lambda_3$ ) međusobno normalne, i ugao orijentacije elipse  $\alpha$  (u slučaju elipsoida postojeće dodatni ugao orijentacije u odnosu  $xy$  ravan). Pravac orijentacije elipse i elipsoida je u pravcu najduže ose elipse/elipsoida. Na levoj strani na slici 1 prikazana je elipsa kada se ose elipse poklapaju sa osama koordinatnog sistema, dok na desnoj strani je prikazana elipsa koja je ukošena za ugao  $\alpha$ . Kada se ose elipse/elipsoida poklapaju sa osama koordinatnog sistema, tada nema kuplovanih elemenata i matrica krutosti ima dijagonalni oblik.

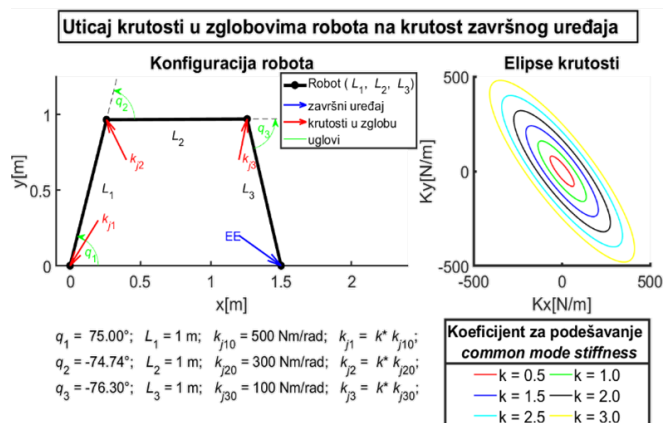
Dužine osa i ugao orijentacije elipsoida se dobija dekompozicijom matrice (SVD – engl. *Singular Value Decomposition*) krutosti kao

$$K_T = USV^T, \quad (8)$$

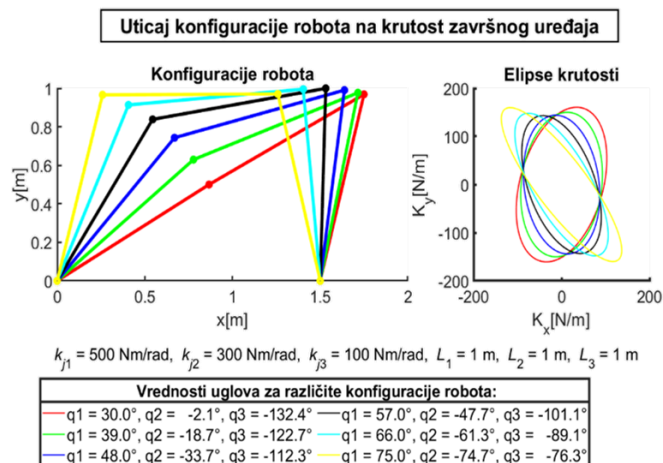
Kolone ortogonalnih matrica  $U$  i  $V$  predstavljaju sopstvene vektore, a elementi na dijagonali dijagonalne matrice  $S$  predstavljaju sopstvene vrednosti. Sopstvene vrednosti matrice  $S$  predstavljaju intenzitete krutosti duž osa elipsoida, a vrednosti kolona matrice  $V$  predstavljaju sopstvene vektore koji određuju pravac orijentacije osa elipse/elipsoida.

Oblikovanje krutosti završnog uređaja može se podeliti na krutost zavisnu od konfiguracije (CDS – engl. *Configuration Dependant Stiffness*) i krutost koja zavisi od krutosti zglobova (CMS – engl. *Common Mode Stiffness*) [16]. CDS potiče od redundantne konfiguracije robota i koristi se za usmeravanje elipse ili elipsoida krutosti, dok CMS utiče na veličine osa elipse ili elipsoida. CMS predstavlja dodatni parametar koji se može uključiti u oblikovanje krutosti. Krutost završnog uređaja robota pogonjenog sa aktuatorima konstantne krutosti može se promeniti samo rekonfiguracijom kada je robot kinematički redundantan.

Na primeru planarne konfiguracije robota sa 3 stepena slobode (segmenti  $L_1$ ,  $L_2$  i  $L_3$ ) koja je ilustrovana slici 2 (levo) prikazan je uticaj CMS na elipsu krutosti (slika 2 desno). Pozicije zglobova ( $q_1$ ,  $q_2$  i  $q_3$ ) su konstantne i samim tim pozicija završnog uređaja (EE) je konstantna. Krutost zglobova ( $k_{j1}$ ,  $k_{j2}$  i  $k_{j3}$ ) dobija se kao proizvod početnih vrednosti krutosti ( $k_{j10}$ ,  $k_{j20}$  i  $k_{j30}$ ) i parametra CMS-a ( $k$ ) kao  $k_{j1} = kk_{j10}$ ,  $k_{j2} = kk_{j20}$  i  $k_{j3} = kk_{j30}$ . CMS ne utiče na oblik (odnos osa) i usmerenje elipse



Sl. 2. Uticaj *Common Mode Stiffness*-a na krutost završnog uređaja robota. Levo: Planarna konfiguracija robota koja se sastoji od tri segmenta –  $L_1$ ,  $L_2$  i  $L_3$  (crno); pozicija završnog uređaja robota (plavo); krutosti u zglobovima  $k_{j1}$ ,  $k_{j2}$  i  $k_{j3}$  (crveno); pozicije zglobova  $q_1$ ,  $q_2$  i  $q_3$  (zeleno). Desno – Elipsoidi krutosti za fiksnu konfiguraciju ( $q_1 = 75^\circ$ ,  $q_2 = -74.74^\circ$  i  $q_3 = -76.30^\circ$ ) različiti koeficijent CMS-a  $k \in [0.5 - 3]$ . Krutost u zglobovima se računa kao proizvod početnih vrednosti krutosti ( $k_{j10}$ ,  $k_{j20}$  i  $k_{j30}$ ) i parametra common mode stiffness-a ( $k$ ) kao  $k_{j1} = kk_{j10}$ ,  $k_{j2} = kk_{j20}$  i  $k_{j3} = kk_{j30}$ .



Sl. 3. Uticaj konfiguracije kinematički redundantnog robota na krutost završnog uređaja robota sa dužinama segmenata  $L_1 = 1m$ ,  $L_2 = 1m$  i  $L_3 = 1m$ , i krutostima u zglobovima  $k_{j1} = 500Nm/rad$ ,  $k_{j2} = 300Nm/rad$  i  $k_{j3} = 100Nm/rad$ . Levo: Različite planarne konfiguracije robota sa istom pozicijom završnog uređaja; Desno – Elipsoidi krutosti za različite konfiguracije robota.

krutosti, već samo na njen volumen odnosno samo linearno skalira elemente matrice krutosti.

Jedan od pristupa za oblikovanje matrice ili elipse (ili elipsoida u 3D prostoru) krutosti robota pogonjenog aktuatorima konstantne krutosti je kroz promenu kinematičke konfiguracije robota kada postoji kinematička redundansa. Promena konfiguracije se odvija u nultom prostoru. To omogućava da robot pored primarnog zadatka (praćenje trajektorije) izvrši i sekundarni zadatak koji je u ovom slučaju oblikovanje krutosti završnog uređaja robota. Na primeru planarne konfiguracije robota sa 3 stepena slobode (segmenti  $L_1$ ,  $L_2$  i  $L_3$ ) koja je ilustrovana slici 3 (levo) prikazan je uticaj CDS na elipsu krutosti (slika 3 desno).

## IV. ALGORITAM ZA OFFLINE PLANIRANJE KRUTOSTI I POZICIJE ZAVRŠNOG UREĐAJA ROBOTA

Osim preko matrice krutosti, krutost završnog uređaja je moguće oblikovati preko elipse krutosti. U ovom radu predložen je offline pristup oblikovanja krutosti završnog uređaja robota, promenom optimizacionih algoritama, koji je predviđen za planiranje krutosti kada je zadatak u napred poznat, pa samim tim i trajektorija završnog uređaja. Primenjena su dva kriterijuma koji kombinuju oblik i grešku orijentacije elipsoida. Oblikovanje elipsoida krutosti se ostvaruje kombinacijom nultog prostora i krutosti u zglobovima. Optimizacioni algoritmi su primenjeni na simulacionom modelu KUKA LWR robota na primeru ravanskog kretanja u „xy” ravni, kada se završni uređaj robota kreće po krivoj putanji.

Optimizacioni algoritmi koji su korišćeni su zasnovani na SLSQP (engl. Sequential Least Square Programming) [10, 17, 18], a implementirani su Matlab-u. SLSQP je algoritam koji optimizuje vrednosti nelinearnih kriterijumskih funkcija sa linearnim i nelinearnim ograničenjima. Ograničenja koja postoje u predloženim optimizacionim algoritmima se odnose na ostvarive vrednosti pozicije zglobova robota i na definisani opseg krutosti koje robot može da ostvaruje. Nelinearna ograničenja koja moraju biti zadovoljena se odnose na kinematiku. Optimizacioni algoritam uvek mora da zadovolji željenu poziciju završnog uređaja robota.

Kako zbog prirode zadatka, pozicija zadnjeg zgloba ne utiče na položaj završnog uređaja, već samo na ugao orijentacije oko z ose, njegova vrednost je zaključana na  $0^\circ$ . Na taj način robot ima 6 stepeni slobode na raspolaganju za izvršavanje zadatka. Usvojen je da raspon krutosti zglobova bude 1-100 Nm/rad. Ovo se može usvojiti bez gubljenja opštosti, jer bitan je relativan odnos krutosti u zglobovima za orijentaciju i odnos osa elipsoida krutosti. Naknadno preko CMS-a se podešava i volumen.

Prvi predloženi kriterijum ( $f_1$ ) usmerava elipsoid i maksimizira krutost duž pravca kretanja, zadavajući minimalni odnos dijagonala elipsoida. Drugi kriterijum ( $f_2$ ) usmerava elipsoid duž pravca kretanja, ali zadajući tačan odnos dijagonala elipsoida. Predložene optimizacione metode imaju za cilj da doprinesu planiranju trajektorije i krutosti zglobova prilikom izvršavanja zadataka.

## A. Maksimiziranje krutosti duž pravca kretanja

Oblikovanje elipsoida krutosti moguće je ostvariti primenom kriterijumske funkcije definisane kao

$$f_1 = \frac{|\alpha_{error}| + c}{\min\left(\frac{r_{max}}{r_{min}}, r\right)/r}, \quad (9)$$

gde  $\alpha_{error}$  označava grešku orijentacije elipsoida u stepenima,  $r$  je minimalni željeni odnos osa elpsoida,  $r_{max}$  i  $r_{min}$  su najduža i druga po dužini osa elipsoida, dok je  $c$  pozitivna konstanta koja omogućava optimizaciju kada je apsolutna greška orijentacije elipsoida  $|\alpha_{error}| = 0^\circ$ , dok je željena orijentacija u smeru kretanja završnog uređaja robota. Usvojena je vrednost  $c = 0.01$ .

U svakoj iteraciji računaju se pozicije i krutosti zglobova koje minimiziraju vrednost funkcije  $f_1$  kao

$$\begin{bmatrix} q[p] \\ k_j[p] \end{bmatrix} = \underset{\substack{q \in [q_{min}, q_{max}] \\ k_j \in [k_{j_{min}}, k_{j_{max}}]}}{\operatorname{argmin}} f_1(q, k_j), \quad (10)$$

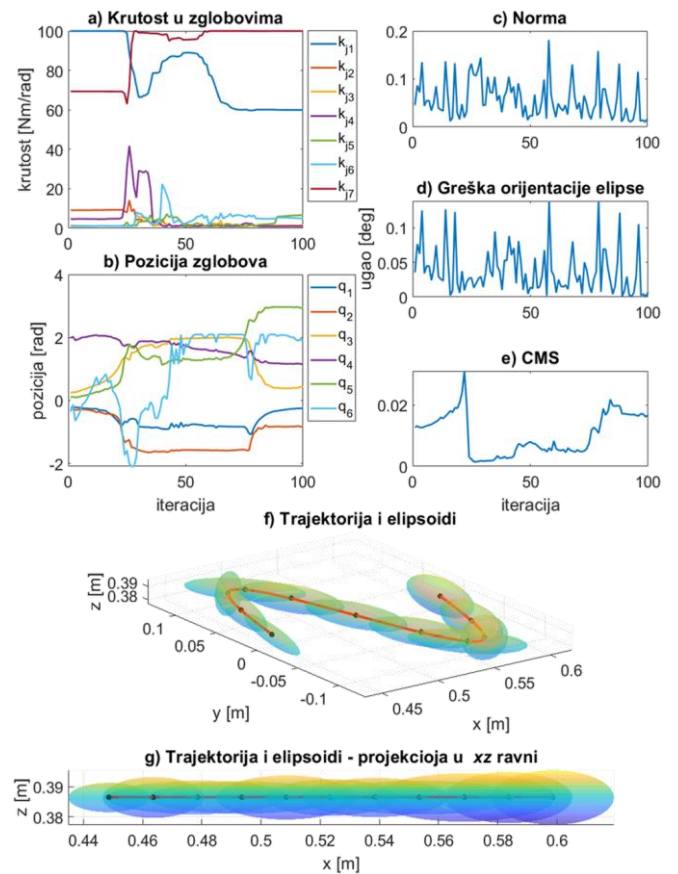
gde je  $p$  redni broj iteracije, a  $q_{min}, q_{max}, k_{j_{min}}$  i  $k_{j_{max}}$  su minimalne i maksimalne vrednosti pozicija i krutosti zglobova. Opseg vrednosti promenljivih u optimizacionom algoritmu se može dodatno suziti, i samim tim smanjiti prostor pretrage i ubrzati algoritam pretrage u svakoj iteraciji. Nove granične vrednosti varijabli ( $q_{min}^*, q_{max}^*, k_{j_{min}}^*$  i  $k_{j_{max}}^*$ ) u svakoj iteraciji se računaju uzimajući u obzir maksimalne brzine promene koje robot može da ostvari u okviru jedne iteracije (za pozicije zglobova -  $\Delta q$ , za krutost zglobova -  $\Delta k_j$ ) i fizički ostvarive vrednosti kao

$$q_{min\_iter}[p] = \max(q_{min}, q[p-1] - \Delta q), \quad (11)$$

$$q_{max\_iter}[p] = \min(q_{max}, q[p-1] + \Delta q), \quad (12)$$

$$k_{j_{min\_iter}}[p] = \max(k_{j_{min}}, k_j[p-1] - \Delta k_j), \quad (13)$$

$$k_{j_{max\_iter}}[p] = \min(k_{j_{max}}, k_j[p-1] + \Delta k_j). \quad (14)$$



Sl. 4. Simulacioni rezultati za oblikovanje elipsoida krutosti na primeru krivolinijskog kretanja kada je zahtev da odnos osa elipsa bude minimalno 5:1: a) krutost u zglobovima; b) pozicija zglobova; c) norma (vrednost kriterijumske funkcije); d) greška orijentacije; e) CMS; f) trajektorija i elipsoidi; g) trajektorija i elipsoidi- projekcija u xy ravni.

To je računski zahtevan posao i nije ga jednostavno implementirati da radi u realnom vremenu, ali moguće ga je iskoristiti u fazi planiranja krutosti i trajektorije zglobova i završnog uređaja.

Simulacioni rezultati za primer krivolinijskog kretanja su prikazani na slici. Na slici 4a je prikazana krutosti u zglobovima, a na slici 4b pozicija zglobova. Slika 4c prikazuju vrednost (normu) optimizacione funkcije, dok slika 4d ilustruje grešku orijentacije. Slika 4e je CMS kojim su skalirane krutosti sa slike 4a da bi se dobili skalirani elipsoidi.

Primenjena optimizaciona funkcija i algoritam su ostvarili zadati cilj, da elipsoid ima željeno usmerenje i minimalni odnos osa. Dobijeni CMS skalira elipse da bi bile uporedive. Dobijene elipsoide moguće je dodatno skalirati da se dobije željena amplituda, ali samo po jednoj od osa. Da bi bilo moguće potpuno oblikovati elipsoid krutosti, potrebno je modifikovati kriterijumsku funkciju.

### B. Oblikovanje elipsoida krutosti

Da bi se elipsoid krutosti potpuno oblikovala neophodno je da budu ostvareni sledeći zahtevi:

- 1) željeni pravac orijentacije elipsoida,
- 2) tačan odnos osa elipsoida,
- 3) magnitude osa elipsoida.

Kada su prva dva uslova zadovoljena, treći se ostvaruje primenom CMS-a na već oblikovanu elipsu. Da bi prva dva uslova mogla simultano da se optimizuju, predložena je modifikovana kriterijumska funkcija koja kombinuje grešku orijentaciju i odnos osa elipse

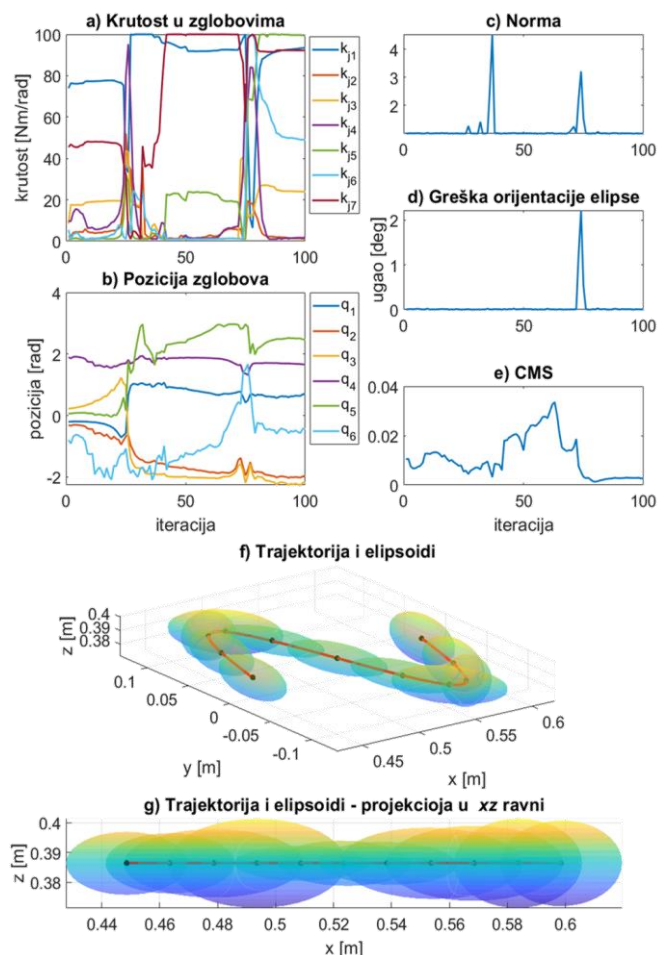
$$f_2 = (1 + |\alpha_{error}|) \left( 1 + \left| r - \frac{r_{max}}{r_{min}} \right| \right). \quad (15)$$

Pozicije i krutosti zglobova u svakoj iteraciji se računaju identično kao i u prethodnom primeru opisanom u jednačinama (10) – (14) samo je optimizaciona funkcija promenjena i definisana kao  $f_2$ .

Funkcija je modifikovana tako da penalizuje svaku grešku orijentacije, i svako odstupanje odnosa osa od željenog odnosa. Zadati su zahtevi da je greška orijentacije  $\alpha_{error} = 0^\circ$ , dok je željena orijentacija u smeru kretanja završnog uređaja robota, a odnos osa elipse  $r = 5$ .

Simulacioni rezultati za primer krivolinijskog kretanja su prikazani na slici 5. Na slici 5a je prikazana krutosti u zglobovima, a na slici 5b pozicija zglobova. Slika 5c prikazuju vrednost (normu) optimizacione funkcije, dok slika 5d ilustruje grešku orijentacije. Slika 5e je CMS kojim su skalirane krutosti sa slike 5a da bi se dobili skalirani elipsoidi.

Primenjena optimizaciona funkcija i algoritam su ostvarili zadati cilj, da elipsoid ima željeno usmerenje i odnos osa. Dobijeni CMS skalira elipse da bi bile uporedive. Dobijene elipsoide moguće je dodatno skalirati da se dobije željena amplituda. Algoritam je ostvario zadati cilj da elipsa ima željeno usmerenje i odnos osa. Dobijeni CMS skalira elipsoide da bi bile uporedivi. Rezultati pokazuju da svi elipsoidi imaju željeni oblik ili oblik koji je jako blizak



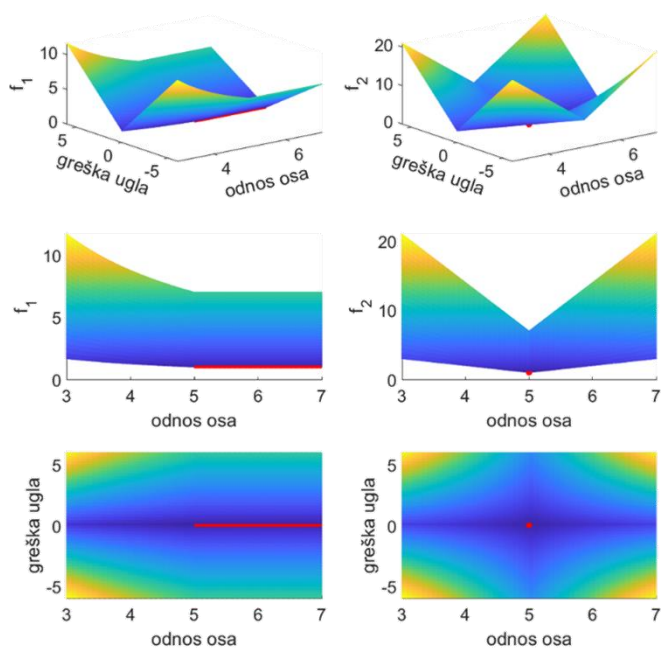
Sl. 5. Simulacioni rezultati za oblikovanje elipsoida krutosti na primeru krivolinijskog kretanja kada je zahtev da odnos osa elipsa bude tačno 5:1: a) krutost u zglobovima; b) pozicija zglobova; c) norma (vrednost kriterijumske funkcije); d) greška orijentacije; e) CMS; f) trajektorija i elipsoidi; g) trajektorija i elipsoidi - projekcija u xy ravni.

željenom. Dobijene elipsoide moguće je dodatno skalirati da se dobije željena amplituda osa.

Slika 6 ilustruje vrednosti funkcija u zavisnosti od greške orijentacije i odnosa osa elipse, a crvena boja označava minimum funkcije koji je u slučaju  $f_1$  definisan kao prava, dok u slučaju  $f_2$  kao jedna tačka. Samim tim je jasno da je optimalni set za  $f_2$  koji je konzervativniji mnogo teže zadovoljiti nego u slučaju labavijih zahteva kriterijumske funkcije  $f_1$ . Ostvarivanje optimalnog rešenja u svakoj iteraciji uslovljeno je fizičkim ograničenjima samog robota.

## V. DISKUSIJA I ZAKLJUČAK

U radu je uspešno implementiran pristup oblikovanja krutosti završnog uređaja robota pomoću grafičke reprezentacije krutosti preko elipsoida na modelu robota KUKA LWR. Krutost koja se analizira je zasnovana na modelu. Ilustrovano je da različiti kriterijumi daju rezultate različitog kvaliteta u skladu sa definisanim kriterijumima i fizičkim ograničenjima robota. Dobijeni rezultati uglavnom dobro ispunjavaju zadate zahteve, dok su ograničenja izraženija kod konzervativnije kriterijumske funkcije koja se ogleda u trenucima kada trajektorija ima najveće



Sl. 6. Oblici kriterijumskih funkcija u zavisnosti od greške orijentacije i odnosa osa elipsi. Crvena boja označava minimum funkcije koji je u slučaju  $f_1$  definisan kao prava, dok u slučaju  $f_2$  kao jedna tačka

zakrivljenje, a samim tim i najveće promene orijentacije elipsoida. To pokazuje da su ostvarivi rezultati ograničeni izborom dela radnog prostora, kao i oblikom trajektorije. Klasična matrica translatorne krutosti ima 6 elemenata koje treba optimizovati, dok predložene kriterijumske funkcije koriste samo dva parametra, ugao greška ugla orijentacije elipsoida i odnos osa.

#### ZAHVALNICA

Rad je realizovan u okviru projekta Fonda za nauku Republike Srbije PROMIS, Grant #6062528, ForNextCobot i tokom istraživanja finansiranog od strane Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije. Broj ugovora 2022/200103.

#### LITERATURA

- [1] S. Haddadin, A. Albu-Schäffer and G. Hirzinger, "Safe Physical Human-Robot Interaction: Measurements, Analysis and New Insights," in *Robotics Research. Springer Tracts in Advanced Robotics*, Berlin, Heidelberg, Springer, 2010, pp. 395-407.
- [2] A. De Santis, B. Siciliano, A. De Luca and A. Bicchi, "An atlas of physical human-robot interaction," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 43, no. 3, pp. 253-270, 2008.
- [3] N. Hogan, "Impedance Control: An Approach to Manipulation: Part II-implementation," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 107, no. 1, pp. 8-16, 1985.
- [4] B. Lukić, T. Petrić, L. Žlajpah and K. Jovanović, "KUKA LWR Robot Cartesian Stiffness Control Based on Kinematic Redundancy," in *The 28th International Conference on Robotics in Alpe-Adria-Danube Region, RAAD 2019*, Kaiserslautern, Germany, 2019.
- [5] R. Van Ham, T. G. Sugar, B. Vanderborght, K. W. Hollander and D. Lefeber, "Compliant actuator designs," *IEEE Robotics & Automation Magazine*, vol. 16, no. 3, pp. 81-94, 2009.
- [6] A. Albu-Schäffer, M. Fischer, G. Schreiber, F. Schoeppe and G. Hirzinger, "Soft robotics: what Cartesian stiffness can obtain with passively compliant, uncoupled joints?," in *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, Sendai, Japan, 2004.

- [7] F. Petit and A. Albu-Schäffer, "Cartesian impedance control for a variable stiffness robot arm," in *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, San Francisco, CA, USA, 2011.
- [8] M. H. Ang and G. B. Andeen, "Specifying and achieving passive compliance based on manipulator structure," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 11, no. 4, pp. 504-515, 1995.
- [9] N. Lukić and P. B. Petrović, "Complementary projector for null-space stiffness control of redundant assembly robot arm," *Assembly Automation*, vol. 39, no. 4, pp. 696-714, 2019.
- [10] N. Knežević, B. Lukić, K. Jovanović, L. Žlajpah and T. Petrić, "End-effector Cartesian stiffness shaping - sequential least squares programming approach," *Serbian Journal of Electrical Engineering*, vol. 18, no. 1, pp. 1-14, 2021.
- [11] N. Knežević, B. Lukić and K. Jovanović, "Feedforward Control Approaches to Bidirectional Antagonistic Actuators Based on Learning," in *Advances in Service and Industrial Robotics*, Cham, Springer, 2020, pp. 337-345.
- [12] W. Roozing, Z. Ren and N. G. Tsagarakis, "An efficient leg with series-parallel and biarticular compliant actuation: design optimization, modeling, and control of the eLeg," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 40, no. 1, pp. 37-54, 2021.
- [13] A. Nejadfarid, S. Schütz, K. Mianowski, P. Vonwirth and K. Berns, "Moment Arm Analysis of the Biarticular Actuators in Compliant Robotic Leg Carl," in *Biomimetic and Biohybrid Systems*, Cham, Springer, 2018, pp. 348-360.
- [14] A. Ajoudani, N. G. Tsagarakis and A. Bicchi, "On the role of robot configuration in Cartesian stiffness control," in *2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, Seattle, WA, USA, 2015.
- [15] A. Ajoudani, N. G. Tsagarakis and A. Bicchi, "Choosing Poses for Force and Stiffness Control," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 33, no. 6, pp. 1483-1490, 2017.
- [16] A. Ajoudani, M. Gabiccini, N. Tsagarakis, A. Albu-Schäffer and A. Bicchi, "TeleImpedance: Exploring the role of common-mode and configuration-dependant stiffness," in *2012 12th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots (Humanoids 2012)*, Osaka, Japan, 2012.
- [17] P. T. Boggs and J. W. Tolle, "Sequential quadratic programming for large-scale nonlinear optimization," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 124, no. 1-2, pp. 123-137, 2000.
- [18] N. Knežević, B. Lukić, K. Jovanović, T. Petrić and L. Žlajpah, "End-Effector Cartesian Stiffness Optimization: Sequential Quadratic Programming Approach," in *Proceedings of the 5th International Conference on Electrical, Electronic and Computing Engineering (IcETran 2019)*, Silver Lake, Serbia, 2019.

#### ABSTRACT

The stiffness of the robot's end-effector (EE) determines the robot's behavior when interacting with the environment. The stiffness of the EE is most often represented by a stiffness matrix whose complete design can be impossible because robots do not have enough degrees of freedom to adjust all the elements in the stiffness matrix. This leads to the application of optimization that balances the values of the stiffness matrix elements that are of interest for the task. In this paper, an approach for offline shaping of the stiffness matrix using stiffness ellipsoids is proposed, where stiffness is shaped by adjusting the orientation and axis length of the ellipsoid. The shape of the ellipsoid has fewer parameters that need to be adjusted relative to the stiffness matrix. Two criterion functions for shaping the ellipsoid stiffness have been proposed to exploit robot kinematic redundancy in shaping the stiffness ellipsoid. Optimal values of joint positions and stiffness were calculated using the algorithm based on SLSQP (Sequential Least Square Programming). Following the shaping of EE stiffness ellipsoid, adjustments or its volume based on variations in joint stiffness are highlighted.

#### End-effector passive stiffness shaping through the stiffness ellipsoid

Branko Lukić, Nikola Knežević i Kosta Jovanović