

Modelovanje transporta toplote u višeslojnim strukturama u nestacionarnom režimu korišćenjem Grin-ove funkcije i ekvivalentnih električnih RC kola

Radovan Gospavić
Katedra za Matematiku Fiziku i
Nacrtnu Geometriju,
Građevinski fakultet
Univerziteta u Beogradu
Beograd, Srbija
gospavic@grf.bg.ac.rs,
ORCID 0000-0002-4336-1813

Goran Todorović
Katedra za Matematiku Fiziku i
Nacrtnu Geometriju,
Građevinski fakultet
Univerziteta u Beogradu
Beograd, Srbija
todor@grf.bg.ac.rs,
ORCID 0000-0002-1195-4761

Zorana Petojević
Upravljanje projektima u
građevinarstvu,
Građevinski fakultet
Univerziteta u Beogradu
Beograd, Srbija
Zurich University of Applied
Sciences, School of Architecture,
Design, and Civil Engineering,
Toessfeldstrasse 11, 8401
Winterthur, Switzerland
zjovanovic@grf.bg.ac.rs,
ORCID 0000-0001-9555-5989

Milica Mirković Marjanović
Laboratorija za toplotnu tehniku
i zaštitu od požara
Institut za ispitivanje materijala
Beograd, Srbija
milica.mirkovic@institutims.rs
ORCID 0000-0001-6023-8414

Abstract— Predstavljena je analiza transporta toplote kroz višeslojne građevinske pregrade u nestacionarnom slučaju u vremenskom domenu. Razmatrani su pristupi bazirani na Grin-ovim funkcijama i konvoluciji kao i modelovanje nestacionarnih termičkih procesa korišćenjem ekvivalentnog RC kola. Pokazano je da je sa praktičnog stanovišta, pri analizi termalnih gubitaka u građevinskim objektima, metod baziran na Grin-ovim funkcijama i konvolucionom integralu u vremenskom domenu pogodniji za određivanje fluksa toplotnih gubitaka kroz višeslojne pregrade u slučajevima kada su poznate vanjske promjenljive temperature vazduha sa spoljašnje i unutrašnje strane posmatrane strukture, dok je modelovanje bazirano na ekvivalentnom električnom RC kolu pogodnije u slučajevima kada su poznate vremenski zavisna spoljašnja temperatura vazduha i snaga unutrašnjih grejnih tela. U modelu baziranom na RC kolu moguće je uzeti u obzir i toplotne gubitke kroz pod kao i toplotni kapacitet prostorije, što je u slučaju pristupa baziranog na Grin-ovim funkcijama u vremenskom domenu znatno složenije. Na osnovu razvijenog numeričkog RC modela dobijene su toplotne dinamičke karakteristike posmatranog višeslojnog zida u vidu vremenskih konstanti za različite delove konstrukcije.

Ključne reči— *transport toplote; višeslojne strukture; Grin-ova funkcija; nestacionarni režim; ekvivalentno RC kolo.*

I. UVOD

Transport toplote kroz višeslojne planarne strukture ima veliki uticaj na termalne performanse i praktičnu primenu pri

analizi energetske efikasnosti građevinskih objekata [1]. Pored toga analiza fizičkih procesa vezanih za transport toplote kroz složene strukture je od praktičnog interesa i u različitim oblastima industrije građevinarstva, elektrotehnike i tehnologije [2]. U analizi transporta toplote u višeslojnim planarnim strukturama u nestacionarnim uslovima u opštem slučaju koriste se analitičke i numeričke metode u vremenskom ili kompleksnom domenu [3-7]. Sa stanovišta praktičnih primena analiza u vremenskom domenu je pogodna jer omogućava direktnu procenu termičkih parametara posmatrane strukture koji su od praktičnog interesa [8], [9]. Metode analize u frekventnom domenu uglavnom počivaju na primeni Fourier-ove ili Laplas-ove transformacije na polazni problem sa odgovarajućim početnim i graničnim uslovima. U slučaju višeslojnih struktura potrebno je uzeti u obzir i granične uslove na razdvojnima površinama (matching conditions) što dodatno usložnjava analizu [6], [7]. U praktičnim primenama analiza u frekventnom domenu se vrlo često svodi na analizu na jednoj karakterističnoj frekvenciji, za koju se obično usvaja učestanost dnevnih ili sezonskih varijacija spoljašnje temperature [10].

Ovim se znatno olakšava analiza. Jedna od analitičkih metoda koji je moguće koristiti u vremenskom i u kompleksnom domenu pri analizi transporta toplote je pristup baziran na Grin-ovim funkcijama (GF) [8], [19]. GF predstavlja rešenje polazne nestacionarne Fourier-ove jednačine za posmatranu višeslojnu strukturu sa odgovarajućim graničnim uslovima u slučaju

jedinične Dirak-ve pobude [9]. Pošto je merenje temperature jednostavnije i pogodnije u praktičnim primenama od merenja termalnog fluksa, u većini praktičnih slučajeva kao spoljašnje pobude se koriste temperaturske varijacije na spoljašnjim površinama posmatrane strukture ili vremenske varijacije temperature vazduha u okolini posmatrane strukture [8]. Ovako dobijena GF isključivo zavisi od termalnih osobina posmatranog materijala i geometrijskih dimenzija posmatrane strukture, odnosno debljine pojedinih slojeva [8], [10]. Ako je GF poznata, prostorna raspodela temperature i fluksa u vremenskom domenu unutar posmatrane strukture se dobija kao vremenska konvolucija dobijene GF i proizvoljne vremenski zavisne spoljašnje pobude. Sličnu proceduru je moguće sprovesti i u kompleksnom domenu, u ovom slučaju i temperaturska raspodela se dobija u kompleksnom domenu [8,9]. Analiza transporta toplote kroz višeslojne građevinske pregrade u dinamičkim uslovima definisana je standardom ISO 13786, 2007 [11] u frekventnom domenu. Ovaj standard omogućava definisanje pojedinih dinamičkih parametara višeslojne građevinske pregrade sa stanovišta transporta toplote, na određenim karakterističnim frekvencijama. Sa druge strane analiza u vremensko domenu omogućava mnogo detaljniji uvid u proces transporta toplote kroz posmatranu strukturu [8], [9]. Analiza transporta toplote bazirana na analogiji sa električnim kolima koja se sastoje od električne otpornosti (R) i kondenzatora kapacitivnosti (C) se bazira na formalnoj analogiji između jednačina koje opisuju transport toplote kroz materijal u kojima figurišu temperatura i termički fluksa i jednačina koje opisuju napone i struje u RC kolu respektivno [12]-[14]. U ovoj analogiji količina toplote i toplotna kapacitivnost nekog dela posmatrane sredine su formalno analogni količini elektriciteta i električnoj kapacitivnosti respektivno a provođenje toplote je analogno punjenju i pražnjenju kondenzatora u RC kolu. U skladu sa ovom analogijom električne otpornosti i kapacitivnosti kondenzatora analogne su termičkim otpornostima i kapacitivnostima respektivno [14]. Ovakav pristup je raširen u literaturi koja se bavi transportom toplote u složenim višeslojnim strukturama. U pojednostavljenim slučajevima kada se koristi mali broj idealizovanih RC elemenata ovakav pristup je poznat pod nazivom „Lumped Parameter Model” (LPM) [15]. Korišćenjem ekvivalentnog RC kola u analizi transporta toplote se svodi na pronalaženje ekvivalentnih napona i struja u posmatranom kolu koje odgovaraju temperaturama i gustinama termičkih fluksa respektivno, i ova analiza se uglavnom vrši u kompleksnom domenu. Rezultati u dinamičkim uslovima u vremenskom domenu se dobijaju inverznom Laplas-ovom transformacijom ili korišćenjem Grin-ove funkcije za posmatrano RC kolo i konvolucionog integrala [16].

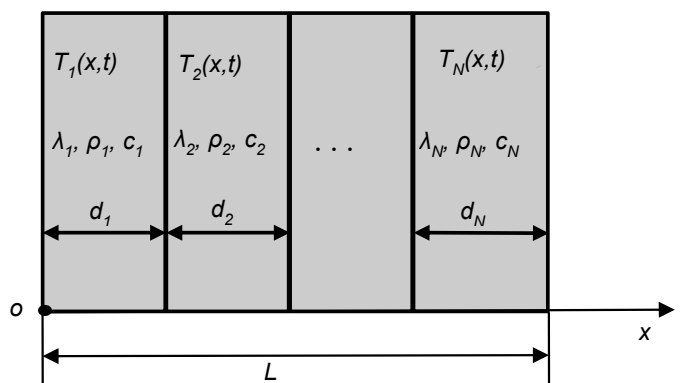
II. MODELOVANJE TRANSPORTA TOPLOTE U VIŠESLOJNIM PLANARNIM STRUKTURAMA

Provođenje toplote kroz višeslojne planarne strukture u nestacionarnom slučaju se modeluje vremenski zavisnom Furie-ovom jednačinom sa korespondentnim graničnim i početnim uslovima. Parcijalna diferencijalna jednačina (PDJ) koja opisuje transport toplote kondukcijom u n -tom sloju posmatrane planarne strukture u nestacionarnom slučaju je data sledećom relacijama [17], [18]:

$$\frac{\partial T_n(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{\rho_n \cdot c_n} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_n \cdot \frac{\partial T_n(x,t)}{\partial x} \right) \quad (1)$$

$$x \in [x_{n-1}, x_n], n = 1, 2, \dots, N;$$

gde su ρ_n , λ_n i c_n gustina [kg/m³], termička provodnost [W/m·K] i masena specifična toplota materijala [J/kg·K] u n -tom sloju pri čemu je x -osa orijentisana normalno na posmatranu strukturu tako da su pojedini slojevi unutar strukture raspoređeni duž x ose, sa t je označeno vreme. Temperaturska raspodela unutar n -tog sloja je označena sa $T_n(x,t)$, x -koordinate graničnih površina između n -tog i $n+1$ sloja su označene sa x_n i ukupan broj slojeva u opštem slučaju je označen sa N . Neophodno je napomenuti da u datom slučaju pretpostavljeno da se transport toplote obavlja samo u smeru x -ose odnosno u normalnom pravcu na posmatranu ravansku strukturu. Ova pretpostavka je ispunjena samo pod uslovom da su debljine pojedinih slojeva mnogo manje od lateralnih dimenzija cele strukture. U ovom slučaju se jednačina provođenja toplote svodi na jednodimenzionu (1D) PDJ datu relacijom (1). Ova pretpostavka je zadovoljena u većini praktičnih slučajeva vezanih za pregrade ili zidove u građevinskim objektima. U slučaju da ovaj uslov nije ispunjen neophodno je analizirati dvodimenzionu (2D) ili trodimenzionu (3D) jednačinu provođenja toplote. Ovakav slučaj se javlja pri analizi toplotnih gubitaka u građevinskim objektima kada je neophodno uključiti liniske ili tačkaste gubitke kada su korespondentne jednačine provođenja 2D i 3D respektivno. U relaciji (1) je pretpostavljeno sa su svi termički i fizički parametri pojedinih materijala u slojevima posmatrane strukture konstantni i nezavisni od temperature tako da se cela struktura sastoji od N homogenih slojeva i razmatrani problem je linearan [8]. Ovaj uslov linearnosti je zadovoljen za spoljašnje temperature vazduha koje se javljaju u praksi. Neophodno je napomenuti da termalni parametri materijala kao što je termička provodnost zavise i od drugih fizičkih parametara kao što je vlažnost posmatranog materijala [18]. Šematski prikaz posmatrane višeslojne strukture dat je na Slici 1. Ukupna debljina strukture je označena sa L , dok je debljina n -tog sloja jednaka d_n .



Sl. 1. Razmatrana višeslojna planarna struktura sa dimenzijama, fizičkim parametrima materijala i temperaturskom raspodelom u pojedinim slojevima

Početni i granični uslovi dati su sledećim relacijama [8], [9]:

$$T_n(x, t = 0) = T_0(x), x \in [x_{n-1}, x_n], n = 1, 2, \dots, N$$

$$\alpha_1 \cdot (T_u(t) - T_1(x, t)|_{x=0}) = -\lambda_1 \cdot \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad (2)$$

$$\alpha_2 \cdot (T_N(x, t)|_{x=L} - T_s(t)) = -\lambda_N \cdot \frac{\partial T_N(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=L},$$

gde su α_1 i α_2 [W/m²·K] koeficijenti prelaza toplote u graničnom sloju (boundary layers) na spoljašnjim površinama posmatrane strukture. U slučaju građevinskih struktura koeficijenti prelaza toplote su različiti sa unutrašnje i spoljašnje strane pregrade ili fasadnog zida zbog različitih fizičkih uslova i njihove numeričke vrednosti su određene domaćim standardom SRPS EN ISO 6946 i jednake su 7,69 i 25 [W/m²·K] sa unutrašnje i spoljašnje strane objekta respektivno. Ove vrednosti uključuju transport toplote u graničnom sloju usled kondukcije, konvekcije i radijacija [19]. Temperaturna raspodela u početnom trenutku $t = 0$ je data sa $T_0(x)$ dok su $T_s(t)$ i $T_u(t)$ vremenski promenljive temperature vazduha sa spoljašnje i unutrašnje strane pregrade respektivno. Ako su termalni kontakti između pojedinih slojeva idealni temperature i termalni fluksevi na spojevima pojedinih materijala su jednaki u oba materijala, odnosno važe sledeći uslovi na spojevima između slojeva (matching conditions) [8], [9]:

$$\begin{aligned} T_n(x, t)|_{x=x_n} &= T_{n+1}(x, t)|_{x=x_n}, \\ \lambda_n \cdot \frac{\partial T_n(x, t)}{\partial x}|_{x=x_n} &= \lambda_{n+1} \cdot \frac{\partial T_{n+1}(x, t)}{\partial x}|_{x=x_n}, \end{aligned} \quad (3)$$

U slučaju kada termalni kontakti između pojedinih slojeva nisu idealni i kada postoje površinske termalne otpornosti na kontaktima slojeva neophodno je modifikovati uslove date gornjim relacijama [8].

A. Pristup baziran na Grin-ovoj funkciji

Uvođenjem pogodne transformacije za temperaturnu raspodelu moguće je nehomogene granične uslove date relacijom (2) transformisati u homogene dok se polazna homogena PDJ data sa (1) transformiše u nehomogenu jednačinu. Na ovaj način moguće je rešenje polaznog problema (1–3) izraziti u pogodnom analitičkom obliku pomoću Grin-ove funkcije. Transformacije za temperaturnu raspodelu u n-tom sloju datu su sledećom relacijama [17]:

$$\begin{aligned} T_n(x, t) &= T_n^*(x, t) + U(x, t), \\ U(x, t) &= T_u(t) \cdot f_1(x) + T_s(t) \cdot f_2(x), \end{aligned} \quad (4)$$

gde su $f_1(x)$ i $f_2(x)$ pomoćne bezdimenzione funkcije koje zavise samo od prostornih koordinata, $T_u(t)$ i $T_s(t)$ su vremenski zavisne temperature vazduha sa unutrašnje i spoljašnje strane pregrade respektivno, dok veličina $T_n^*(x, t)$ predstavlja transformisanu temperaturu. Pomoćne funkcije $f_{1,2}$ zadovoljavaju sledeće relacije [17], [8]:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot (1 - f_1(x)|_{x=0}) &= -\lambda_1 \cdot \frac{\partial f_1(x)}{\partial x}|_{x=0}, \\ \alpha_2 \cdot (f_2(x)|_{x=L} - 1) &= \lambda_N \cdot \frac{\partial f_2(x)}{\partial x}|_{x=L}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_n \cdot \frac{\partial f_{1,2}(x, t)}{\partial x} \right) &= 0, x \in [x_{n-1}, x_n]. \end{aligned} \quad (5)$$

Prve dve jednačine u gornjim relacijama proizilaze iz graničnih uslova za temperaturnu raspodelu. Iz gornjih relacija se vidi da pomoćne funkcije $f_{1,2}$ brojno odgovaraju stacionarnim temperaturnim raspodelama u posmatranj strukturi za konstantne jedinične temperaturske pobude u vazduhu sa unutrašnje i spoljašnje strane pregrade respektivno. Poslednja jednačina u (5) je uvedena zbog

pogodnosti jer se na taj način oblik konačnog analitičkog rešenja znatno pojednostavljuje [17], [8].

Ako su termalni kontakti između slojeva u pregradi idealni tada za pomoćne funkcije $f_{1,2}$ i za transformisanu temperaturu $T_n^*(x, t)$ važe isti uslovi na kontaktima kao i za temperaturnu raspodelu datu u relacijama (3). Koristeći gornja razmatranja i relacije (1-5) dolazi se do PDJ u n-tom sloju i graničnih uslova za transformisanu temperaturu datih sledećim relacijama [8], [9]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_n^*(x, t)}{\partial t} &= \frac{1}{\rho_n \cdot c_n} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_n \cdot \frac{\partial T_n^*(x, t)}{\partial x} \right) - \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \\ \alpha_1 \cdot (T_1^*(x, t)|_{x=0}) &= \lambda_1 \cdot \frac{\partial T_1^*(x, t)}{\partial x}|_{x=0}, \\ \alpha_2 \cdot (T_N^*(x, t)|_{x=L}) &= -\lambda_N \cdot \frac{\partial T_N^*(x, t)}{\partial x}|_{x=L}. \end{aligned} \quad (6)$$

Iz gornjih relacija proizilazi da se korišćenjem transformacije date relacijom (4) i graničnih uslova za pomoćne funkcije $f_{1,2}$ datih relacijama (5) početni problem dat sa homogenom PDJ (1) i nehomogenim graničnim uslovima datim sa relacijama (2) transformiše u problem definisan nehomogenom PDJ i homogenim graničnim uslovima datim relacijama (6). Pronalaženje analitičkog rešenja problema datog sa (6) započinje rešavanjem odgovarajućeg homogenog problema [8], [9].

Korišćenjem metoda razdvajanja promenljivih u korespondentnoj homogenoj PDJ koja odgovara relaciji (6) dobija se regularni Šturm-Luivil-ov (ŠL) problem dat sledećom relacijom za n-ti sloj [8], [17]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\lambda_n \cdot \partial \phi_n}{\partial x} \right) + \beta^2 \cdot \rho_n \cdot c_n \cdot \phi_n(x) = 0, x \in [x_{n-1}, x_n]. \quad (7)$$

gde su ϕ svojstvene funkcije ili rešenja posmatranog ŠL problema dok je veličina β [1/s^{0.5}] konstanta razdvajanja koja se javlja prilikom razdvajanja promenljivih, kvadrat ove konstante predstavlja svojstvenu vrednost posmatranog ŠL problema. Odgovarajući granični i uslovi na razdvojnim površinama su analogni uslovima u relacijama (6) i (3) respektivno ali nezavisni od vremena i datim su sledećim relacijama [8], [9]:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot \phi_1(x)|_{x=0} &= \lambda_1 \cdot \frac{\partial \phi_1(x)}{\partial x}|_{x=0}, \\ \alpha_2 \cdot \phi_N(x)|_{x=L} &= -\lambda_N \cdot \frac{\partial \phi_N(x)}{\partial x}|_{x=L}, \\ \phi_n(x)|_{x=x_n} &= \phi_{n+1}(x)|_{x=x_n}, \\ \lambda_n \cdot \frac{\partial \phi_n(x)}{\partial x}|_{x=x_n} &= \lambda_{n+1} \cdot \frac{\partial \phi_{n+1}(x)}{\partial x}|_{x=x_n}. \end{aligned} \quad (8)$$

Granični uslovi i uslovi na razdvojnim površinama između pojedinih slojeva u gornjim relacijama definišu transcendentnu karakterističnu jednačinu koja za argument ima konstante razdvajanja β i koja ima beskonačno mnogo korena. Kvadrati ovih korena predstavljaju svojstvene vrednosti datog ŠL problema. Može se dokazati da ako je proizvod $\rho_n \cdot c_n$ u svakom sloju realan i veći od nule (što je u realnom fizičkom sistemu uvek slučaj) da su sve svojstvene vrednosti dobijenog ŠL problema β^2 realne, odnosno da je odgovarajući operator koji odgovara ŠL problemu

Hermitski. Ako je pored toga zadovoljen i uslov $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_n > 0$ (što je takođe uvek zadovoljeno u realnom slučaju) sve svojstvene vrednosti su realne i pozitivne odnosno korespondentni operator je pozitivno definitan [20, 21]. Svojstvene funkcije razmatranog ŠL problema u n -tom sloju koje odgovaraju i -toj svojstvenoj vrednosti su date sledećom relacijom [8], [9]:

$$\phi_{n,i}(x) = A_{n,i} \cdot \sin\left(\frac{\beta_i}{\sqrt{k_n}} \cdot x\right) + B_{n,i} \cdot \cos\left(\frac{\beta_i}{\sqrt{k_n}} \cdot x\right), \quad (9)$$

$$k_n = \frac{\lambda_n}{\rho_n \cdot c_n}, x \in [x_{n-1}, x_n],$$

gde se koeficijenti $A_{n,i}$ i $B_{n,i}$ mogu odrediti za svaki sloj i za svaku svojstvenu vrednost do na multiplikativnu konstantu iz graničnih uslova i uslova na razdvojnim površinama. Svojstvene funkcije date relacijom (9) su ortogonalne, dok se multiplikativna konstanta u koeficijentima $A_{n,i}$ i $B_{n,i}$ određuje tako da svojstvene funkcije budu i normirane. Svakoju svojstvenoj vrednosti β_i^2 odgovara jedno partikularno rešenje odgovarajućeg homogenog problema koji odgovara nehomogenom problemu datom relacijom (6). Ova partikularna rešenja u n -tom sloju za i -tu svojstvenu vrednost data su sledećom relacijom [8, 9]:

$$u_{n,i}(x, t) = \exp(-\beta_i^2 \cdot t) \cdot \phi_{n,i}(x). \quad (10)$$

Opšte rešenje odgovarajućeg homogenog problema je dato lineranom kombinacijom partikularnih rešenja, dok se finalno analitičko rešenje problema datog sa (6), za prostornu i vremenski raspodelu transformisane temperature, nalazi korišćenjem opšteg rešenja homogenog problema i Duhamel–ovog principa [22].

Pošto su sve svojstvene vrednosti realne i pozitivne iz gornje relacije se vidi da su sva partikularna rešenja eksponencijalno opadajuće funkcije u vremenu. Iz ovoga proizilazi da će i opšte rešenje za temperatursku raspodelu u sebi sadržati samo eksponencijalno opadajuće vremenske članove, odnosno temperaturske raspodele će uvek biti ograničene i posle prestanka dejstva spoljašnjih pobuda će se ponašati kao eksponencijalno opadajuće funkcije što fizički odgovara postepenom hlađenju posmatrane strukture posle prestanka dejstva spoljašnjih pobuda (temperaturskih varijacija u vazduhu sa unutrašnje i spoljašnje strane pregrade). Posle niza transformacija dobija se sledeći analitički izraz za vremenski zavisnu temperatursku raspodelu unutar posmatrane pregrade [8], [9]:

$$T(x, t) = T_{ic} + g_1 * T_u + g_2 * T_s, \quad (11)$$

gde su $T_u(t)$ i $T_s(t)$ vremenske varijacije temperature vazduha sa unutrašnje i spoljašnje strane posmatrane pregrade respektivno, simbol „*“ označava vremensku konvoluciju, T_{ic} je član koji potiče od inicijalne temperaturske raspodele i koji eksponencijalno opada sa vremenom i $g_{1,2}$ su Grin–ove funkcije koje zavise samo od fizičkih i termičkih parametara materijala i dimenzija posmatrane višeslojne pregrade. Iz gornje relacije se vidi da je za dobijanje temperaturske raspodele unutar posmatrane višeslojne strukture date u (11)

neophodno poznavanje vremenske zavisnosti temperature vazduha sa unutrašnje i sa spoljašnje strane zida. Grin–ove funkcije za planarnu višeslojnu strukturu je moguće izraziti u analitičkom obliku i date su sledećim izrazima [8], [9]:

$$g_1(x, t) = \Delta_1(x) \cdot \delta(t) + \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i^2 \cdot w_{1,i} \cdot \phi_i(x) \cdot e^{-\beta_i^2 \cdot t}$$

$$g_2(x, t) = \Delta_2(x) \cdot \delta(t) + \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i^2 \cdot w_{2,i} \cdot \phi_i(x) \cdot e^{-\beta_i^2 \cdot t}, \quad (12)$$

gde su β_i^2 svojstvene vrednosti ŠL problema, $\delta(t)$ je Dirak–ova delta funkcija. Veličine $w_{1,2,i}$ i $\Delta_{1,2}$ su date sledećim relacijama [8], [9]:

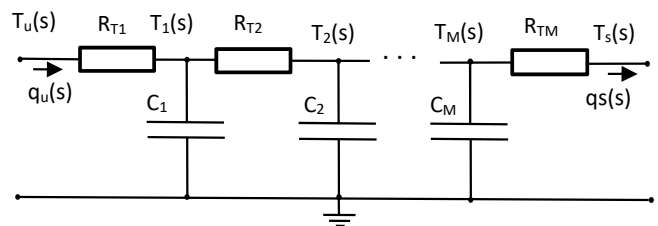
$$\Delta_{1,2}(x) = f_{1,2}(x) - \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \cdot w_{1,2,i}$$

$$w_{1,2,i} = \langle f_{1,2}, \phi_i \rangle = \sum_{n=1}^N \int_{x_{n-1}}^{x_n} f_{1,2}(y) \rho_n c_n \phi_i(y) dy, \quad (13)$$

gde veličine $w_{1,2,i}$ predstavljaju Furie–ove koeficijente u razvoju pomoćnih funkcija $f_{1,2}$ po svojstvenim funkcijama. Na ovaj način je poznavajući GF za datu višeslojnu planarnu strukturu moguće je odrediti temperatursku raspodelu unutar strukture za proizvoljne spoljašnje temperaturske varijacije korišćenjem konvolucionog integrala datog relacijom (11). Iz jednačine (12) se vidi da recipročne karakteristične vrednosti predstavljaju karakteristična vremena za posmatranu strukturu $\tau_i = 1 / \beta_i^2$ ($i = 1, \dots$) koja određuju termičko ponašanje strukture u dinamičkim uslovima.

B. Modelovanje transporta toplote korišćenjem ekvivalentnog električno RC kola

Transport toplote kroz višeslojne planarne strukture moguće je modelovati i korišćenjem električne analogije sa RC kolima [12]–[14]. U ovom slučaju provođenje toplote kroz tanak ravanski sloj se modeluje termalnom otpornošću posmatranog sloja i termičkom kapacitivnošću gde temperature u pojedinim tačkama i termalni fluksevi imaju anlognu ulogu, odnosno figurišu u jednačinama na isti način, kao i električni naponi i struje u RC kolu respektivno. Ekvivalentno RC kolo kojim se modeluje provođenje toplote kroz višeslojnu ravansku strukturu je prikazano na Sl 2.



Sl. 2. Ekvivalentno električno RC kolo koje se koristi u modelovanju transporta toplote u višeslojnoj planarnoj strukturi

Pojedini RC segmenti u kolu odgovaraju slojevima na koje je izdvojena posmatrana struktura. Svaki pojedinačni materijal u višeslojnoj strukturi može biti izdvojen na više slojeva. Povećanjem broja slojeva se poboljšava RC model i posmatrano kolo vernije opisuje transport toplote u realnoj strukturi. Na slici 2 veličine R_T [K/W] i C [J/K] predstavljaju

termičke otpornosti i kapacitivnosti pojedinih slojeva u posmatranoj strukturi, M je broj slojeva na koje je izdijeljena posmatrana struktura, $T_l - T_M$ su temperature na spojevima slojeva dok su T_u, T_s, q_u i q_s temperature i termički fluksevi sa unutrašnje i spoljašnje strane pregrade respektivno. Radi pogodnosti u analizi temperature i fluksevi su dati u kompleksnom domenu. Vrednosti termičkih otpornosti i kapacitivnosti m -tog sloja koji figurišu u RC kolu na Slici 2 se dobijaju korišćenjem sledećih relacija:

$$R_{Tm} = \frac{\delta_m}{\lambda_m S} = (S \cdot U_m)^{-1}; C_m = S \cdot \delta_m \cdot \rho_m \cdot c_m, \quad (14)$$

gde su $\delta_m, \lambda_m, \rho_m, c_m$ i U_m debljina, termička provodnost, gustina, specifična toplota i U -vrednost [$W/m^2 \cdot K$] m -tog sloja respektivno, S [m^2] je površina posmatrane pregrade. U gornjem modelu je moguće uključiti i prelaz toplote u graničnim slojevima preko termalnih otpornosti graničnih slojeva sa unutrašnje i spoljašnje strane, koji uključuju kondukciju konvekciju i radijaciju [19]. Predstavljeni model transporta toplote baziran na ekvivalentnom RC kolu može se posmatrati i kao sistem sa dva ulaza i dva izlaza [10].

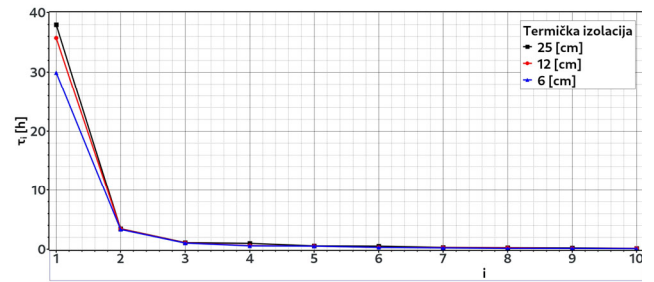
III. REZULTATI I DISKUSIJA

Razmatran je petoslojni fasadni zid čije su termalne karakteristike i dimenzije prikazane u Tabeli 1. Termički parametri za izolaciju odgovaraju mineralnoj vuni. Razmatrane su GF za različite debljine izolacionog sloja od 6, 12 i 25 [cm]. Prvih deset recipročnih svojstvenih vrednosti β_i^2 datih u (9) i (12), koje odgovaraju karakterističnim vremenima $\tau_i = 1/\beta_i^2$ ($i=1, \dots, 10$) računane za različite debljine termičke izolacije od 25, 12 i 6 [cm] prikazane su na Slici 3.

TABELA I. TERMALNE KARAKTERISTIKE I DIMENZIJE PETOSLOJNOG FASADNOG ZIDA

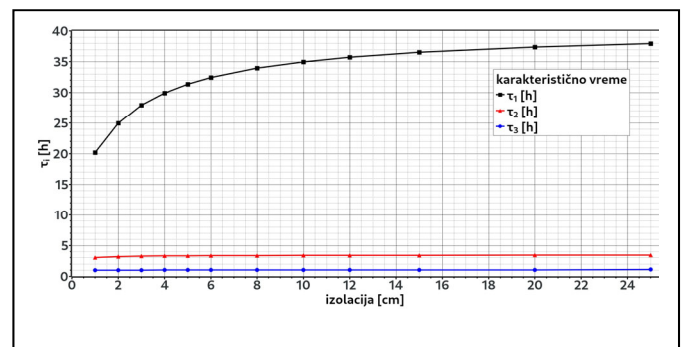
	materijal	d[cm]	ρ [kg/m ²]	λ [W/m·K]	c[J/kgK]
1	zaštitni sloj	2	800	0.7	1090
2	opeka	25	1800	0.76	920
3	malter	1	1900	0.99	1050
4	izolacija	6- 25	23	0.034	840
5	zaštitni sloj	2	1900	0.7	1050

Sa slike se vidi da samo prvo karakteristično vreme $\tau_1 = 1/\beta_1^2$, koje ujedno dominantno utiče na Grin-ove funkcije u relacijama (9) i (12), značajno zavisi od debljine izolacije.



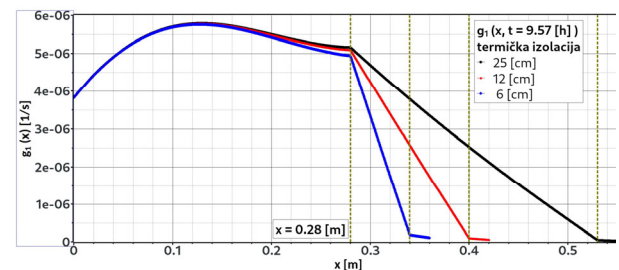
Sl. 3. Prvih deset karakterističnih vremena koja predstavljaju recipročne svojstvene vrednosti $\tau_i = 1/\beta_i^2$ ($i=1, \dots, 10$) za debljine termičke izolacije od 25, 12 i 6 [cm].

Na Slici 4 je prikazana zavisnost prva tri karakteristična vremena od debljine izolacije u opsegu od 1 do 25 [cm].



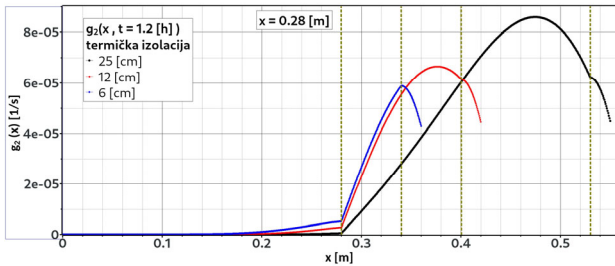
Sl. 4. Zavisnost prva tri karakteristična vremena od debljine termičke izolacije u opsegu od 1 do 25 [cm].

Sa slike se vidi da samo dominantno karakteristično vreme τ_1 značajno zavisi do debljine izolacije i to samo za tanje izolacione slojeve do 1-12 [cm], dok dalje povećavanje izolacionog sloja preko 20 [cm] ima veoma mali uticaj na ponašanje posmatrane strukture u dinamičkim uslovima. Dominantno karakteristično vreme τ_1 se menja u opsegu od 20 do 40 [h] dok su ostala karakteristična vremena manja od 5 [h]. Na Slici 5 su prikazane GF g_l unutar posmatrane višeslojne strukture u trenutku $t=9,57$ [h] za različite debljine izolacije od 25, 12 i 6 [cm]. Odabrani vremenski trenutak je dovoljno dug i uporediv sa dominantnim karakterističnim vremenom da bi uticaj temperaturske pobude sa unutrašnje strane zida bio uočljiv unutar cele strukture.



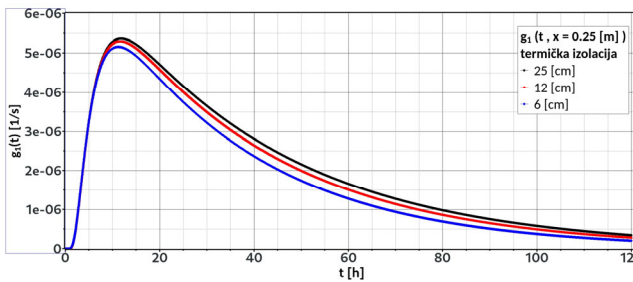
Sl. 5. Raspodela GF g_l unutar posmatranog višeslojnog zida, za različite debljine izolacionog sloja od 25, 12 i 6 [cm], u trenutku $t=9,57$ [h]

Sa gornje slike se vidi da se sa povećavanjem termalne izolacije smanjuje termalni fluks kroz izlacioni sloj (direktno je srazmeran nagibu GF u izolacionom sloju) kao i da je uticaj temperaturske pobude sa unutrašnje strane zida veći za deblje izolacione slojeve iz čega proizilazi da se unutrašnji slojevi strukture brže zagrevaju i sporije hlade pri temperaturskoj pobudi sa unutrašnje strane zida. Na Slici 6 su prikazane GF g_2 unutar posmatrane višeslojne strukture u trenutku $t=1,2$ [h] koje predstavljaju odziv na Dirak-ovu temperatursku pobudu sa spoljašnje strane zida. Sa slike se vidi da sa povećanjem debljine izolacionog slojha uticaj temperaturske pobude sa spoljašnje strane na unutrašnje slojeve zida opada.



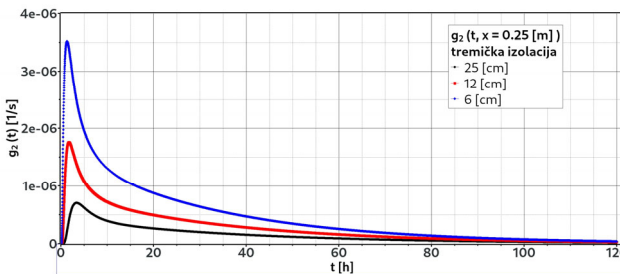
Sl. 6. Raspodela GF g_1 unutar posmatranog višeslojnog zida, za različite debljine izolacionog sloja, od 25, 12 i 6 [cm], u trenutku $t=1,2$ [h]

Na Slikama 7 i 8 su prikazane vremenske zavisnosti GF g_1 i g_2 respektivno unutar zida na mestu određenom prostornom koordinatom $x=25$ [cm] za iste debljine izolacionog sloja kao i u predhodnim slučajevima.



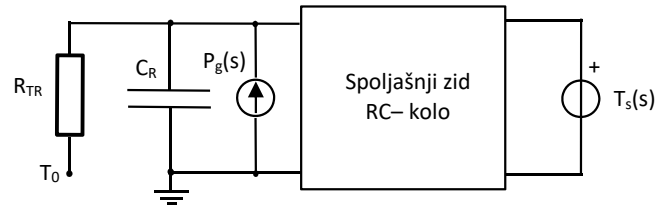
Sl. 7. Vremenska zavisnost GF $g_1(t)$ na mestu određenom prostornom koordinatom $x=25$ [cm].

Sa slika se vidi da je uticaj debljine izolacionog sloja na vremensku raspodelu GF već za temperaturske pobude sa spoljašnje strane.



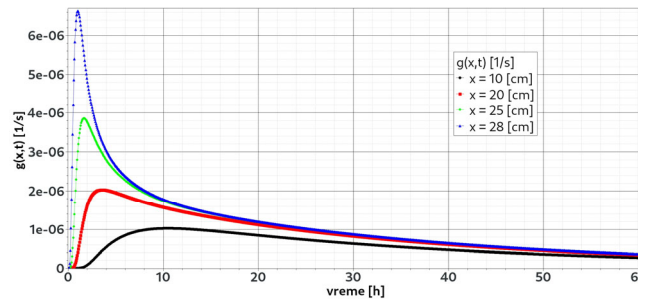
Sl. 8. Vremenska zavisnost GF $g_2(t)$ na mestu određenom prostornom koordinatom $x=0.25$ [m].

Na Slici 9 je šematski prikazan model transporta toplote baziran na ekvivalentnom RC kolu opisanom u predhodnom odeljku koji uključuje varijacije spoljašnje temperature vazduha $T_s(s)$, grejna tela u unutrašnjosti objekta koja su predstavljena "strujnim generatorom" $P_g(s)$ [W·s] u kompleksnom domenu, ekvivalentnu termičku kapacitivnost unutrašnjosti posmatranog objekta ili prostorije C_R [J/K] i termalnu otpornost pojedinih elemenata unutar posmatranog objekta R_{TR} . Temperatura T_0 je konstantna temperatura nekog dela objekta ili tla. U otpornost R_{TR} moguće je uključiti termičku otpornost poda i u tom slučaju konstantna temperatura T_0 je temperatura termostata za koju se može uzeti temperaturu tla.



Sl. 9. Šematski prikaz modela transporta toplote baziran na ekvivalentnom RC kolu za spoljašnji zid, varijacije spoljašnje temperature vazduha i termičkih parametre unutrašnjosti prostorije.

Spoljašnji ili fasadni zid je modelovan blokom koji predstavlja ekvivalentno RC kolo prikazanim na Slici 2 i koji uključuje i granične slojeve. Na Slici 10 prikazane su GF koje predstavljaju temperaturske odzive na Dirak-ovu pobudu od strane spoljašnje temperature vazduha ($T_s(s) = 1$ [K·s]) na različitim mestima unutar zida čije su kordinate: 10, 20, 25 i 30 [cm].



Sl. 10. GF koje predstavljaju temperaturske odzive na Dirak-ovu pobudu od strane spoljašnje temperature vazduha na različitim mestima unutar zida čije su x koordinate 10, 20, 25 i 30 [cm].

Dimenzije i termičke karakteristike analiziranog zida su date u Tabeli I dok je debljina izolacionog sloj u ovom slučaju bila 12 [cm]. Za termičku otpornost R_{TR} i termičku kapacitivnost unutrašnjosti C_R usvojene su sledeće vrednosti 0,0024536 [K/W] i $3,69853 \cdot 10^7$ [J/K] respektivno. Ekvivalentno RC kolo kojim je modelovan spoljašnji zid se sastojalo od 42 RC elementa koji odgovaraju uniformno raspodeljenim segmentima unutar zida debljine od 1 [cm]. Odzivi na Dirak-ove pobude spoljašnje temperature i snage grejnih tela i inicijalne uslove u ekvivalentnom RC kolu dobijeni su korišćenjem metoda potencijala čvorova u kompleksnom domenu dok su GF u vremenskom domenu dobijene korišćenjem inverzne Laplas-ove transformacije.

Neophodno je napomenuti da su na slikama 7 i 8 predstavljene GF posmatranog fasadnog zida bez uticaja unutrašnjosti objekta za razliku od GF prikazanih na slici 10. Na sličan način dobijaju se i temperaturski odzivi na Dirak-ovu pobudu od strane "strujnog generatora" ($P_g(s) = 1 [W \cdot s]$) i odzivi na početne uslove. Temperaturske varijacije u prostoriji ili unutar fasadnog zida za proizvoljnu vremensku zavisnost spoljašnje temperature vazduha i snage grejnih tela u prostoriji dobijaju se korišćenjem GF i konvolucionog integrala datog u (11).

IV. ZAKLJČAK

U radu je predstavljen analitički postupak za pronalaženje GF višeslojne planarne strukture u vremenskom domenu koje se dobijaju kao rešenja odgovarajuće Furie-ove jednačine transporta toplote. Rešavanjem odgovarajućeg svojstvenog problema dobijaju se karakteristična vremena za posmatranu višeslojnu strukturu koja zavise samo od termičkih parametara materijala i debljina pojedinih slojeva. Ova karakteristična vremena predstavljaju vremena relaksacije i u potpunosti određuju termičko ponašanje posmatrane strukture u dinamičkim uslovima. Temperaturske raspodele i raspodele termičkog fluksa unutar posmatrane višeslojne strukture za proizvoljne vremeske varijacije unutrašnje i spoljašnje temperature vazduha moguće je dobiti korišćenjem dobijenih GF i konvolucionog integrala. Analiziran je uticaj debljine izolacionog sloja na GF i na karakteristična vremena za jedan petoslojni fasadni zid. Pokazano je da debljina izolacionog sloja značajno utiče samo na dominantno karakteristično vreme. Sa smanjenjem debljine izolacionog sloja dominantno karakteristično vreme može da se smanji i za 50 %. Takođe je pokazano da se dominantno karakteristično vreme značajno menja samo u slučaju kada se debljina izolacionog sloja menja u intervalu od 1–12 [cm] posle ovoga dalje povećanje debljine izolacionog sloja ne utiče značajno na promenu dominantnog karakterističnog vremena. Pored toga predstavljen je i termički model višeslojnog zida baziran na ekvivalentnom RC kolu. Predstavljeni RC model se može posmatrati i kao sistem sa dva ulaza i dva izlaza. Termički uticaj, u dinamičkim uslovima, unutrašnjeg prostora i unutrašnjih elemenata posmatranog objekta u RC modelu se uzima u obzir dodavanjem dodatnih termalnih otpornosti i kapacitivnosti na krajevima RC kola sa unutrašnje strane zida. Predstavljeni RC model je pogodan za analizu transporta toplote kroz spoljašnji zid objekta u slučaju kad je poznata samo vremenska varijacija spoljašnjih temperatura vazduha i varijacija snage grejnih tela koja se nalaze unutar posmatranog objekta. Ovakav tip analize u slučaju analitički dobijenih GF bi bio značajno otežan.

ZAHVALNICA

Autori se zahvaljuju Ministarstvu prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije na finansijskoj podršci za istraživanja kroz Ugovor br. 451-03-66/2024-03/200012.

REFERENCE

- [1] Q. Zhu, X. Xu, J. Gao, F. Xiao, A semi-dynamic model of active pipe-embedded building envelope for thermal performance evaluation, *Int. J. Therm. Sci.*, vol. 88, pp. 170-179, 2015. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2014.09.0>
- [2] W. Liu, Tin-Tai Chow, Experimental and numerical analysis of solar-absorbing metallic facade panel with embedded heat-pipe-array, *Appl. Energy*, vol. 265, pp. 114736, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2020.114736>.
- [3] K. Yu, L. Li, K. Shi, H. Liu, Y. Hu, K. Zhang, Y. Liu, X. Wu, Near-field radiative heat transfer between multilayer structures composed of different hyperbolic materials, *Int. J. Heat Mass Trans.*, vol 211, 124229, 2023. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2023.124229>
- [4] H. K. Jalghaf, E. Kovács, B. Bolló, Simulation of transient heat transfer in multilayer walls with photovoltaic cell and air by using efficient numerical methods, *Results Eng.*, vol 21, 101715, 2024. <https://doi.org/10.1016/j.rineng.2023.101715>.
- [5] X. Jin, X. Wu, J. Li, J. He, C. He, H. Zhang, W. Li, High-temperature heat transfer simulation and optimization of quartz fiber-aerogel composite multilayer 3D fabric, *Int. J. Therm. Sci.*, vol 191, 108334, 2023. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2023.108334>.
- [6] H. Zhang, W. Wang, S. Zhang, Z. Zhao, Semi-analytic solution of three-dimensional temperature distribution in multilayered materials based on explicit frequency response functions, *Int. J. Heat Mass Trans.*, vol 118, pp. 208–222, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.10.118>
- [7] S. Wang, Y. Chen, Transient heat flow calculation for multilayer constructions using a frequency-domain regression method, *Build. Environ.*, vol 38, Issue 1, 2003, pp 45-61, [https://doi.org/10.1016/S0360-1323\(02\)00024-0](https://doi.org/10.1016/S0360-1323(02)00024-0).
- [8] M. Mirković Marjanović, R. Gospavić, G. Todorović, An analytical approach based on Green's function to thermal response factors for composite planar structure with experimental validation, *Int. J. Therm. Sci.*, vol 139, pp 129-143, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2019.01.020>.
- [9] G. Todorović, R. Gospavić, Fizičko modelovanje i in-situ merenja transporta toplote kroz višeslojne spoljašnje građevinske zidove, Materijali i konstrukcije u savremenom građevinarstvu- monografija, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, pp. 151-173, 2022. <https://grafar.grf.bg.ac.rs/handle/123456789/3050>.
- [10] Z. Petojević, R. Gospavić, G. Todorović, Estimation of thermal impulse response of a multi-layer building wall through in-situ experimental measurements in a dynamic regime with applications, *Appl. Energy*, vol. 228, pp. 468-486, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2018.06.083>.
- [11] Thermal performance of building components: dynamic thermal characteristics and calculation methods, ISO 13786; 2007.
- [12] B. Ravelo, L. Rajaoarisoa, O. Maurice, Thermal modelling of multilayer walls for building retrofitting applications, *J. Build. Eng.*, vol 29, 101126, 2020.
- [13] J. Duan, N. Li, J. Peng, C. Wang, Q. Liu, Full-response model of transient heat transfer of building walls using thermoelectric analogy method, *J. Build. Eng.*, vol 46, 103717, 2022. <https://doi.org/10.1016/j.jobbe.2021.103717>.
- [14] G. Fraisse, C. Viardot, O. Lafabrie, G. Achard, Development of a simplified and accurate building model based on electrical analogy, *Energy Build.* vol 34, Issue 10, pp. 1017-1031, 2002. [https://doi.org/10.1016/S0378-7788\(02\)00019-1](https://doi.org/10.1016/S0378-7788(02)00019-1).
- [15] A. P. Ramallo-González, M. E. Eames, D. A. Coley, Lumped parameter models for building thermal modelling: An analytic approach to simplifying complex multi-layered constructions, *Energy Build.*, vol 60, pp 174-184, 2013. <https://doi.org/10.1016/j.enbuild.2013.01.014>
- [16] S. Novčić, D. Vranešević, A. Parezanović, I. Medarević, R. Gospavić, G. Todorović, Experimental determination of dynamic parameters of heat passage through the facade wall of a weekend cottage on mountain kopaonik, serbia, pp 512-523, SINARG 2023 Conference, Niš, 14-15 september 2023.
- [17] M.N. Ozisik, *Heat Conduction*, second ed., John Wiley & Sons, United States, 1993.
- [18] H. S.L. Hens, *Building Physics - Heat, Air and Moisture: Fundamentals and Engineering Methods with Examples and Exercises*, second ed., Ernst & Sohn, Berlin, 2012.
- [19] SRPS EN ISO 6946:2017, Komponente i elementi zgrade - Toplotna otpornost i koeficijent prolaza toplote – Metode proračuna, <https://iss.rs/Cyrl/project/show/iss:proj:65445>

- [20] N. Young, An Introduction to Hilbert Space, Cambridge University Press 1988, Cambridge, New York, Melbourne.
- [21] G. Strang, Massachusetts Institute of Technology, Linear Algebra and Its Applications, 4th Edition 4th Edition.
- [22] L. C. Evans Edition Partial Differential Equations (Graduate Studies in Mathematics vol. 19): 2nd Edition, American Mathematical Society

ABSTRACT

The analysis of heat transport through multi-layer building partitions in the non-stationary case in the time domain is presented. Approaches based on Green's functions and convolution and modeling of non-stationary thermal processes based on the use of an equivalent RC circuit are considered. It has been shown that from a practical point of view, when analyzing thermal losses in buildings, the method based on Green's functions and the convolution integral in the time domain is more convenient for determining the heat losses through multi-layered structures in cases where the outside time-varying air temperatures are known, while modeling based on the equivalent electric RC circuits is more suitable in cases where the time-dependent external temperature and the power of the internal heating bodies are known. In the model based on the RC circuits, it is possible to take into account the heat losses through the floor as well as the heat capacity of the room, which is much more complicated for the case of Green's functions approach in the time domain. Based on the developed RC model, the thermal dynamic characteristics of the observed multilayer walls were obtained in the form of time constants for different parts of the structure.

Modeling of heat transport in multi-layer structures in non-stationary case using Green's function and equivalent electric RC circuits

Radovan Gospavić, Goran Todorović, Zorana Petojević, Milica Mirković Marjanović