

# Нумеричко решење Волтерине интегралне једначине прве врсте за генералисани модел повратног удара са путујућим струјним извором

Драган Павловић, Градимир Миловановић, Јован Цветић, Никола Мијајловић и Милан Игњатовић

**Апстракт**—Генералисани модел повратног удара са путујућим струјним извором (ГТЦС модел) представља општи облик модела из којег могу да се изведу сви инжењерски модели повратног удара атмосферског пражњења, модели преносног вода као и модели путујућег струјног извора. У оквиру ГТЦС модела је уведена функција пражњења канала и израчуната за специјалне случајеве. У овом раду смо применили нову нумеричку методу за израчунавање функција пражњења. Предложена метода има велику тачност, врло је ефикасна и релативно је једноставна.

**Кључне речи**—повратни удар, ГТЦС модел, Волтерина интегрална једначина, нумеричке методе, методе квадратура.

## I. Увод

У тренутку када је развијен, ГТЦС модел је дао значајан допринос проучавању атмосферских пражњења. Он је теоријски генерализовао све ГТЦС моделе и отклонио многе њихове недостатке као што су дисконтинуитет струје и дисконтинуитет струјног извода на месту таласног фронта повратног удара. Овај модел се може посматрати као модел атмосферског пражњења код кога се наелектрисане секције корона омотача празне једна за другом при наиласку таласног фронта повратног удара. Свака цилиндрична секција корона омотача представља мали струјни извор који се активира када се потенцијал језгра доведе на потенцијал земље после проласка таласног фронта повратног удара.

Драган Павловић – Електротехнички факултет, Универзитет у Београду, Булевар Краља Александра 73, 11020 Београд, Србија (електронска пошта: dragan.lab3@etf.bg.ac.rs).

Градмир Миловановић – Математички институт САНУ, Кнез Михаилова 36, 11002 Београд, Србија (електронска пошта: gvm@mi.sanu.ac.rs).

Јован Цветић – Електротехнички факултет, Универзитет у Београду, Булевар Краља Александра 73, 11020 Београд, Србија (електронска пошта: cvetic.j@etf.bg.ac.rs).

Никола Мијајловић – Електротехнички факултет, Универзитет у Београду, Булевар Краља Александра 73, 11020 Београд, Србија (електронска пошта: nikola.b.mijajlovic@gmail.com).

Милан Игњатовић – Електротехнички факултет, Универзитет у Београду, Булевар Краља Александра 73, 11020 Београд, Србија (електронска пошта: ignjatovic@etf.bg.ac.rs).

Са математичког аспекта, овај рад представља студију нове класе нелинеарних Волтериних једначина прве врсте. Проблеми са овим једначинама су класични проблеми у математичкој анализи и решавани су од стране многих аутора, али је само мали број аутора разматрао једначину (1) са импулсним функцијама у области атмосферских пражњења. Волтерине једначине прве врсте су саме по себи слабо условљени проблеми, што значи да су решења једначине генерално нестабилна. Ова слаба условљеност чини нумеричко решење веома тешким, а то значи да мала грешка у улазним подацима може да доведе до дивергентног решења. Волтерина интегрална једначина представља срж многих математичких модела у физици, енергетици, екологији и економији.

## II. ПОСТАВКА ПРОБЛЕМА

Циљ рада је израчунавање функције пражњења канала  $f(t - z/v^*)$  и анализа добијених резултата. Полазимо од Волтерине интегралне једначине првог типа:

$$i_{cb}(t) = \int_0^{t, v^*} q'_0(z) \cdot \frac{\partial}{\partial t} f(t - z/v^*) dz. \quad (1)$$

по непознатој функцији  $f(t - z/v^*)$ , где су познате функције: функција струје у тачки удара  $i_{cb}(t)$ ,  $q'_0(z)$  укупно подужно наелектрисање у корони пре повратног удара,  $t$  је апсолутно време мерено у односу на почетак повратног удара,  $z$  је висина канала,  $v$  је брзина повратног удара, а  $v^*$  је редукована брзина повратног удара. Функција  $f(t - z/v^*)$  се може записати као  $f(u)$ . Аргумент функције  $f(u)$  је генералисано време и дат је релацијом (2):

$$u = t - z/v^*, u \geq 0. \quad (2)$$

Функције  $i_{cb}(t)$  и  $q'_0(z)$  су стварне физичке величине, а функција пражњења коју рачунамо је фиктивна величина која је произашла из ГТЦС модела, а представља збир

свих физичких процеса у каналу атмосферског пражњења током повратног удара [1].

За моделовање струје у тачки удара користили смо Хајдлерову функцију, као што је уобичајено у литератури. Њен облик је дат једначином (3):

$$i_{cb}(t) = \frac{I_0}{\eta} \cdot \frac{(t/\tau_1)^n}{1 + (t/\tau_1)^n} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}}. \quad (3)$$

Непознати параметри који се јављају у једначини (3) су:  $I_0$  - амплитуда струје,  $\tau_1$  - временска константа предње ивице,  $\tau_2$  - временска константа задње ивице,  $n$  - параметар нагиба, а  $\eta$  је корекциони фактор. Вредности параметара у једначини (3) се могу добити из мерења.

У раду [1] је уведена функција  $q'_0(z)$  која моделује наелектрисање у каналу пражњења на следећи начин. Полазећи од Хајдлерове функције, усвојена је функција наелектрисања [1]:

$$g(z) = \frac{z^m}{\lambda_1 + z^m} \cdot e^{-\frac{z}{\lambda_2}}, \quad (4)$$

а параметри у једначини (4) се рачунају као:  $m = n$ ,  $\lambda_1 = v^* \cdot \tau_1$  и  $\lambda_2 = v^* \cdot \tau_2$ , док параметар  $z$  представља висину канала. Када је претпостављен облик основне функције, функцију наелектрисања можемо добити као збир основне функције и пертурбације њених извода:

$$q'_0(z) = Q'_0 \cdot \left( g(z) + \lambda_{d1} \frac{dg(z)}{dz} + \lambda_{d2} \frac{d^2 g(z)}{dz^2} \right). \quad (5)$$

Параметри пертурбације  $\lambda_{d1}$  и  $\lambda_{d2}$  се могу добити као  $\lambda_{d1} = v^* \cdot \tau_{d1}$  и  $\lambda_{d2} = v^* \cdot \tau_{d2}$ , где су  $\tau_{d1}$  и  $\tau_{d2}$  константе пражњења за дати модел путујућег струјног извора, а параметар  $Q'_0$  представља линијску густину наелектрисања. Највећа предност функције (5) у односу на остале функције за моделовање наелектрисања у каналу језгра је што омогућава да се у обзир узме утицај различитих расподела наелектрисања дуж канала на физичке процесе унутар самог канала и на изрчени електромагнетски спектар.

Брзина повратног удара  $v$  која фигурише у претходним једначинама је константа и одређује се на основу оптичких мерења.

Да би одредили прецизно све физичке процесе у каналу, прво је потребно прецизно израчунати функцију  $f(u)$  која мора да задовољи четири услова ((6)-(9)) која следе из физике електричних пражњења:

$$f(0) = 0 \quad (6)$$

$$f(u) \geq 0 : u \geq 0 \quad (7)$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{df(u)}{du} \leq 0 : u \geq 0. \quad (9)$$

Други корак, који остављамо за наредна истраживања, је да се добијени резултат повеже са физиком електричних пражњења у цилиндричној геометрији.

### III. ОПИС МЕТОДЕ

Једначина коју у овом раду решавамо је нелинеарна, нехомогена Волтерина интегрална једначина прве врсте. Пре него што кренемо у детаљно описивање метода за решавање, трансформисаћемо једначину (1), како би олакшали крајње израчунавање. Пре свега, у једначину (1) уводимо следећу смену  $f_1(t - z/v^*) = \frac{\partial}{\partial t} f(t - z/v^*)$ .

После наведене смене једначина (1) постаје линеарна интегрална једначина

$$i_{cb}(t) = \int_0^{t-v^*} q'_0(0) \cdot f_1(t - z/v^*) dz. \quad (10)$$

На даље, примењујући математичке трансформације прелазимо на конволуциону интегралну једначину (11) коју ћемо решавати:

$$i(t) = \int_0^t q(\tau) f_1(t - \tau) \cdot d\tau = \int_0^t q(t - \tau) f_1(\tau) \cdot d\tau, \quad (11)$$

где су  $i(t) = i_{cb}(t)/v^*$  и  $q(\tau) = q'_0(v^* \cdot \tau)$ .

Постоји само неколико метода који ефикасно могу решити Волтерину интегралну једначину прве врсте. Као метод смо користили директну дискретизацију и примену квадратурних формула које смо модификовали према потребама сопственог проблема. Избор квадратурних формула које имамо на располагању је доста велики, али постоји извесно ограничење. Наиме, само квадратурне формуле нижег реда (правило интеграције средње тачке или правило трапеза) дају алгоритам који није дивергентан [2]. Ми смо у овом раду користили трапезну квадратуру, а као резултате смо добили функције пражњења короне и језгра канала атмосферског пражњења. Међутим, са математичког аспекта, интересантна су два случаја. Наиме, најбитније је да ли је функција наелектрисања у почетном тренутку једнака

нули или је различита од нуле, тј. да ли је  $q'_0(0) = 0$  или је  $q'_0(0) \neq 0$ . У зависности од тога, применићемо различите методе за решавање проблема.

*А. Метода квадратура (тип функције  $q'_0(0) \neq 0$ )*

Код овог приступа ћемо кренути од једначине (11) и користићемо њену форму која нам више одговара за решавање:

$$i(t) = \int_0^t q(t-\tau)f_1(\tau) \cdot d\tau, \quad (0 \leq t \leq T_{\max}). \quad (12)$$

Када је језгро једначине (12) непрекидна функција и има више непрекидних извода по  $t$ , онда се као веома ефективна метода за нумеричко решавање користи замена одређеног интеграла квадратурним формулама.

Извршићемо дискретизацију на интервалу  $[0, T_{\max}]$  како би конструисали нумеричко решење једначине (12). Вредности независно променљиве  $t$  припадају интервалу  $t \in [0, T_{\max}]$ , а максимални број тачака је  $N_{\max}$  па се корак може добити као  $h = \frac{T_{\max}}{N_{\max}}$  ( мрежа униформна на целом интервалу). Једначина (12) се у дискретном облику може написати као:

$$i_k = i(kh) = \int_0^{t_k} q(t_k - \tau)f_1(\tau) \cdot d\tau \quad (13)$$

Замењујући интеграл из једначине (13) трапезним квадратурним формулама добијамо систем линеарних једначина у матричној форми (14):

$$I = \frac{h}{2} \cdot Q \cdot \tilde{F}_1, \quad (14)$$

при чему матрице у једначини (14) имају форму као у приказу (15):

$$Q = \begin{bmatrix} q(0) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q(h) & q(0) & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ q(2h) & q(h) & q(0) & 0 & \vdots & 0 \\ q(3h) & 2q(2h) & 2q(h) & q(0) & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q(N_{\max}h) & 2q((N_{\max}-1)h) & \dots & \dots & \dots & q(0) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{F}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{f}_0 \\ \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \\ \tilde{f}_4 \\ \vdots \\ \tilde{f}_n \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} i_0 \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} J(t_0) \\ J(t_1) \\ J(t_2) \\ J(t_3) \\ J(t_4) \\ \vdots \\ J(t_n) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Систем једначина (14) се једноставно решава с обзиром да је његова матрица доња троугаона [3]. На овај начин добијамо матрицу дискретних решења  $\tilde{F}_1$ , а крајњи резултат добијамо интерполацијом.

*Б. Метода квадратура (тип функције  $q'_0(0) = 0$ )*

Ове примере ћемо решавати уз модификовану методу квадратура, јер на почетку интервала услов  $q'_0(0) = 0$  претвара Волтерину интегралну једначину у идентитет  $0 = 0$ . У оваквим случајевима решење ћемо представити као збир две компоненте: апроксимативна компонента (решење је дато у виду Тејлоровог реда) и регуларна компонента (која се добија методом трапезних квадратура исто као и у претходном случају).

Апроксимативна компонента решења практично постоји у интервалу који је јако близак нули, тј.  $\tau \in [0, \hat{\tau}]$ :

$$f_1(\tau) = \sum_{v=1}^{N_{\max}} a_v \tau^{v-1}, \quad (16)$$

а број чланова у изразу (16) одређујемо према нашим потребама, мада не би требало да буде више од 10 чланова. Вредности непознатих коефицијената у Тејлоровом развоју добијамо тако што полазимо од једначине (11) и формирамо систем једначина који решavamo и добијамо вредност датих коефицијената.

Помоћу поступка који је описан одредили смо непознате коефицијенте у једначини (16) и нашли смо решење за мале вредности помоћу Тејлоровог развоја на интервалу  $\tau \in [0, \hat{\tau}]$ . Ово решење искористићемо у решавању једначине (12) на целом интервалу  $(0 \leq t \leq T_{\max})$ . Када знамо границе интервала, на основу (12) добијамо:

$$i(t) = \int_0^{\hat{\tau}} q(t-\tau)f_1(\tau) \cdot d\tau + \int_{\hat{\tau}}^t q(t-\tau)f_1(\tau) \cdot d\tau. \quad (17)$$

Први интеграл на десној страни једначине можемо израчунати за свако  $t$ , у ознаци  $J(t)$ , јер имамо аналитички израз за  $q$  за било који аргумент (а у нашем случају аргумент је  $(t-\tau)$ ) и израз (16) за  $f_1(\tau)$ , када

$\tau \in [0, \hat{t}]$ , док на други интеграл примењујемо нумеричку интеграцију као и раније, полазећи од  $\hat{t}$  па до неке вредности  $t = \hat{t} + kh$ . Заменом израза (16) у једначину (12) добијамо израз (18):

$$J(t) = \int_0^{\hat{t}} q(t-\tau) \left( \sum_{v=1}^{N_{\max}} a_v \tau^{v-1} \right) d\tau \quad (18)$$

$$= \sum_{v=1}^{N_{\max}} a_v \left( \int_0^{\hat{t}} q(t-\tau) \tau^{v-1} d\tau \right).$$

Ако узмемо да је  $\hat{t} = t_0$ , на основу (17) добијамо:

$$i_k = i(t_k) = J(t_k) + \int_{t_0}^{t_k} q(t_k - \tau) f_1(\tau) \cdot d\tau. \quad (19)$$

Када све ово узмемо у обзир и извршимо генерализацију, добијамо линеарни систем једначина (20):

$$I = J + \frac{h}{2} \cdot Q \cdot \tilde{F}_1. \quad (20)$$

Репрезентације матрица су дате у једначини (15), с тим што је за сваки пример дат број тачака са којима смо радили у поглављу четири. Систем једначина (20) се једноставно решава. Сада смо добили дискретне вредности тачака као решење једначине на другом интервалу.

Пошто смо решили Волтерину једначину на оба интервала, искористићемо те податке како би добили решење на целом интервалу. Наиме, на првом интервалу имамо аналитичко решење које је апроксимативног карактера. Са одређеним кораком узоркујемо аналитички део решења да добијемо дискретан скуп података  $P_1$ . Са другог интервала ћемо узети дискретна тачке која смо добили као решење система (20) и сместити их у скуп података  $P_2$ . Дискретно решење на целом интервалу добићемо као унију података  $P = P_1 \cup P_2$ . Континуално решење ћемо добити интерполацијом и можемо га означити као  $f_1(u)$ .

#### IV. НУМЕРИЧКИ ПРИМЕРИ

Волтерина интегрална једначина је решена за велики број примера. Посебно су спроведени прорачуни за функције пражњења језгра, а посебно короне атмосферског пражњења. Сви примери из теоријског ГТЦС модела су решени и у једном и у другом случају. У овом поглављу се наводе основни подаци везани за прорачуне функција језгра и короне. У Табелама 1 и 2 смо дао преглед типова функција (од овога зависи коју ћемо методу применити) и броја тачака које смо користили при прорачуну. На сл.1 и сл.2 су дати резултати прорачуна за два примера функције пражњења језгра. Наиме, на поменутиим графицима је приказан први извод функције

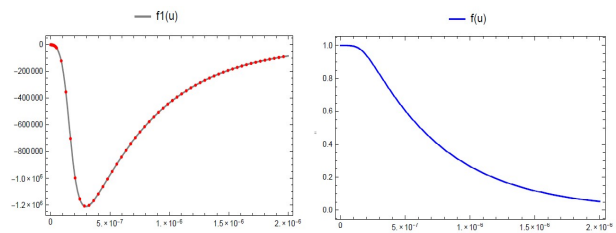
пражњења  $f_1(u)$ , као и функција пражњења  $f(u)$ . Такође, на сл.3 и сл.4 су дати резултати прорачуна за два примера функције пражњења короне.

TABELA I  
ТИП ФУНКЦИЈЕ И БРОЈ ТАЧАКА ЗА ПРОРАЧУН ФУНКЦИЈЕ ПРАЖЊЕЊА ЈЕЗГРА

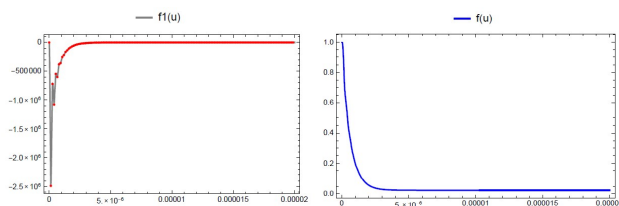
Примери	Тип функције	Број тачака
Пример (1.1)	$q'_0(0) = 0$	50
Пример (1.2)	$q'_0(0) = 0$	50
Пример (1.3)	$q'_0(0) \neq 0$	1500
Пример (2.1)	$q'_0(0) = 0$	125
Пример (2.2)	$q'_0(0) = 0$	125
Пример (3.1)	$q'_0(0) = 0$	180
Пример (3.2)	$q'_0(0) = 0$	200
Пример (3.3)	$q'_0(0) = 0$	200
Пример (4.1)	$q'_0(0) = 0$	150
Пример (4.2)	$q'_0(0) = 0$	125

TABELA II  
ТИП ФУНКЦИЈЕ И БРОЈ ТАЧАКА ЗА ПРОРАЧУН ФУНКЦИЈЕ ПРАЖЊЕЊА КОРОНЕ

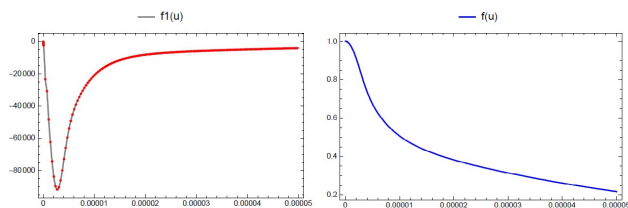
Примери	Тип функције	Број тачака
Пример (5.1)	$q'_0(0) = 0$	50
Пример (5.2)	$q'_0(0) = 0$	200
Пример (6.1)	$q'_0(0) = 0$	150
Пример (6.2)	$q'_0(0) = 0$	200
Пример (7.1)	$q'_0(0) = 0$	300
Пример (7.2)	$q'_0(0) = 0$	200
Пример (8.1)	$q'_0(0) \neq 0$	1000
Пример (8.2)	$q'_0(0) = 0$	200



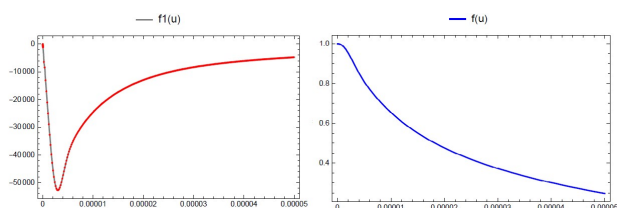
Сл. 1. Први извод функције пражњења и функција пражњења језгра за пример (1.1)



Сл. 2. Први извод функције пражњења и функција пражњења језгра за пример (4.1)



Сл. 3. Први извод функције пражњења и функција пражњења короне за пример (6.1)



Сл. 4. Први извод функције пражњења и функција пражњења короне за пример (7.1)

Питање стабилности решења теоријски је веома јасно. Проблем са конволуционом интегралном једначином прве врсте је јако нестабилан и осетљив и на веома мале пертурбације. У овом поглављу су приказана решења за четири проблема и за сваки пример је у Табели 1 и Табели 2 наведен број тачака са којима је урађен прорачун. Такође, у решењима су за сваки пример нацртани графици на којима су приказане дискретне тачке (тачан резултат прорачуна) и интерполациона функција. Повећавање или смањивање броја тачака изазива осцилације у решењу и решење постаје неупотребљиво.

У примерима (2.1), (2.2), (3.1), (3.2) и (4.2) имали смо проблема са интерполационом функцијом јер је у максимуму функције интерполациона функција дивергирала. Такође, полиномска интерполациона функција није била у могућности да успешно интерполира на целом интервалу. Стога је једино реално решење за ове примере било да се интерполација уради сплајновима. Сплајн интерполација се користи често као и полиномијална интерполација јер њена грешка није

велика, чак и са нижим степенима сплајн полинома. Сплајн интерполацијом се заобилази проблем Рунгеовог феномена, у коме се појављују осцилације између тачака када се интерполира полиномом великог степена. Што се тиче осталих примера, коришћена је стандардна полиномска интерполација [4].

## V. ЗАКЉУЧАК

У овом раду смо предложили прецизану, ефикасну и релативно једноставну нумеричку методу за решавање нелинеарне, нехомогене Волтерине интегралне једначине прве врсте која има форму (1). Предност у односу на остале методе које би се могле применити је та што у овој методи најмања сложеност алгорита и најкраће време израчунавања.

Израчунавање функције пражњења отвара пут многим новим прорачунима у физици електричних пражњења и енергетици.

## ЗАХВАЛНИЦА

Овој рад је настао као део планираних активности на десеминацији резултата на пројекту ТР 37019 Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије за пројектни циклус 2011-2017.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Jovan M. Cvetić, "Model povratnog udara atmosferskog pražnjenja sa specificiranom strujom u tački udara i raspodelom naelektrisanja duž kanala," doktorska disertacija, Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Beogradu, Srbija, jul 1996.
- [2] P.K.Kythe, P.Puri, *Computational Methods for Linear Integral Equations*, Boston, USA, Birkhäuser, 2002.
- [3] G. V. Milovanović, *Numerička analiza III*, Beograd, Srbija, Naučna knjiga, 1991.
- [4] D. Đ. Tošić, *Uvod u numeričku analizu*, Beograd, Srbija, Akademski misao, 2004.

## ABSTRACT

The GTCS model represents the generalization of all engineering lightning return stroke models that is the generalization of the transmission line and the travelling current source models. Within the GTCS model the channel discharge function was introduced and calculated for special cases. We applied a new numerical method for the calculation of the channel discharge function. The proposed method has high accuracy, it is highly efficient and relatively simple.

## Numerical Solution of Volterra Integral Equation of First Kind for GTCS Return Stroke Model

Dragan Pavlovic, Gradimir Milovanovic, Jovan Cvetic, Nikola Mijajlovic and Milan Ignjatovic