

# Prilog primeni kliznih režima višeg reda u stabilizaciji sistema u konačnom vremenu

Boban Veselić, *Member, IEEE*, Branislava Draženović, *Senior Member, IEEE*, Čedomir Milosavljević i Senad Huseinbegović, *Member, IEEE*

**Apstrakt**—U radu se posmatra vremenski kontinualan multivarijabilni sistem upravljanja sa ciljem njegove stabilizacije u konačnom vremenu. Predloženo rešenje koristi klizni režim višeg reda koji anulira red sistema i na taj način se obezbeđuje dolazak trajektorije sistema u koordinatni početak za konačno vreme, uprkos dejstvu poremećaja koji zadovoljavaju uslov poklapanja. Predloženi pristup zahteva da je red sistema jednak celobrojnom umnošku broja ulaza. Kada to nije slučaj, sistem se proširuje do potrebnog reda ubacivanjem određenog broja integratora na ulaze sistema. Za tako prošireni sistem data je metoda projektovanja klizne površi koja obezbeđuje željeno ponašanje i predloženo je odgovarajuće upravljanje. Performanse projektovanog sistema su pokazane na simulacionom primeru.

**Ključne reči**—Klizni režimi višeg reda; Relativni red; Anuliranje reda sistema; Projektovanje klizne površi.

## I. UVOD

REDUKCIJA reda sistema je pojava koja se javlja u sistemima upravljanja promenljive strukture u tzv. kliznom režimu (KR). Organizovanjem KR na unapred definisanoj kliznoj površi u prostoru stanja, dinamika sistema u KR se opisuje diferencijalnom jednačinom redukovano red, koji je manji od inicijalnog reda sistema za broj ulaza sistema. Kako KR nastaje za konačno vreme, tako se i redukcija reda sistema ostvaruje u konačnom vremenu nelinearnim prekidnim upravljanjem [1,2]. Ova osobina se ne može ostvariti linearnom povratnom sregom po stanju.

Projektovanje regularnih, tj. KR prvog reda se vrši u dva koraka. Najpre se definiše odgovarajući potprostor u prostoru stanja (klizna površ (KP)) a zatim upravljanje koje obezbeđuje dolazak a potom i klizanje po toj KP u prisustvu poremećaja. Glavne prednosti kliznih režima su viđene u postizanju zadovoljavajuće dinamike [3] i potpunoj eliminaciji poremećaja koji zadovoljavaju uslove poklapanja [4]. Takođe, redukcija reda sistema sa više ulaza je razmatrana u [4,5], ali to nije smatrano veoma bitnim.

Klizni režimi višeg reda (KRVR) su definisani u [6] za sisteme sa jednim ulazom. Do sada je primena KRVR imala dva osnovna pristupa [6-10]. Prvi je sličan regularnim KR, gde KRVR primoravaju stanje sistema u potprostor sa željenom dinamikom redukovano red. Glavna prednost je redukcija

četeringa (chattering). Četering je osnovni nedostatak KR i ispoljava se pojavom neželjenih visokofrekvencijskih oscilacija. Cilj drugog pristupa je anuliranje nekih izlaza sistema za konačno vreme, dok kretanje stanja sistema nije od interesa.

U sistemu sa jednim ulazom gde se uspostavi KR  $r$ -tog reda, upravljanje anulira odgovarajuću kliznu promenljivu i njenih  $(r - 1)$  uzastopnih izvoda po vremenu [6]. Posledica toga je da se jednim upravljanjem red sistema snizio za  $r$ . To znači da primenom KRVR u sistemima sa više ulaza je moguće značajnije sniziti red sistema. Neki rezultati u primeni KRVR u multivarijabilnim sistemima se mogu naći u [11-13].

Iz ovih mogućnosti proističe prirodan zahtev da se red sistema snizi na nulu, što može biti veoma interesantno sa stanovišta KRVR. Mogućnost anuliranja reda sistema primenom KRVR u slučaju linearnog sistema sa jednim ulazom je prvi put pomenuto u [10], ali nije dalje razrađeno. Redukcija reda sistema na nulu primenom KRVR za jednu klasu linearnih multivarijabilnih sistema je data u [14]. Zahtev je da je broj stanja sistema jednak celobrojnom umnošku broja ulaza. Ukoliko to nije ispunjeno, predloženo je proširivanje sistema uvođenjem fiktivnih stanja. Analiziran je nominalan sistem bez dejstva poremećaja.

U ovom radu se takođe razmatra anuliranje reda multivarijabilnih linearnih sistema primenom KRVR. Međutim, predložen je drugačiji pristup u proširivanju sistema ukoliko nisu ispunjeni gore pomenuti uslovi dimenzija sistema. Potreban broj dodatnih stanja sistema se dobija ubacivanjem integratora na ulaze sistema, što je prisutno u današnjoj praksi KRVR [9]. Ovakav pristup redukuje neželjeni četering, a nova stanja sistema su lako merljiva. Za tako proširen sistem, koji je podvrgnut dejstvu poremećaja, projektovana je KP koja obezbeđuje anuliranje reda sistema, i predloženo je odgovarajuće upravljanje. Trajektorija sistema za konačno vreme dolazi u koordinatni početak uprkos dejstvu poremećaja, što ukazuje na robusnu stabilizaciju u konačnom vremenu.

## II. PREGLED REZULTATA I POSTAVKA PROBLEMA

Ovde su rekapitulirani neki dobro poznati rezultati iz teorije KRVR u sistemima sa jednim ulazom, kako bi se postavio okvir za razmatranje multivarijabilnih sistema u nastavku.

Boban Veselić – Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu, Aleksandra Medvedeva 14, 18000 Niš, Srbija (e-mail: [boban.veselic@elfak.ni.ac.rs](mailto:boban.veselic@elfak.ni.ac.rs)).

Branislava Draženović i Senad Huseinbegović – Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Sarajevu, Sarajevo, Bosna i Hercegovina (e-mails: [brana\\_p@hotmail.com](mailto:brana_p@hotmail.com), [shuseinbegovic@etf.unsa.ba](mailto:shuseinbegovic@etf.unsa.ba)).

Čedomir Milosavljević – Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Istočno Sarajevo, Bosna i Hercegovina, (e-mail: [cedomir.milosavljevic@elfak.ni.ac.rs](mailto:cedomir.milosavljevic@elfak.ni.ac.rs)).

Posmatrajmo kontrolabilan linearni sistem upravljanja sa skalarnim upravljanjem, čiji je model u prostoru stanja dat sa

$$\dot{x} = Ax + b(u + d). \quad (1)$$

$x \in \mathbb{R}^n$  je raspoloživi vektor stanja, a  $u, d \in \mathbb{R}$  su upravljanje i nepoznati ograničeni poremećaj, respektivno.  $A$  i  $b$  su konstantne matrice odgovarajućih dimenzija. Očigledno je da poremećaj zadovoljava uslove poklapanja, tj. deluje na sistem kroz upravljački kanal. Treba primetiti da su sve promenljive u (1) funkcije vremena, ali da su vremenski argumenti radi kraće notacije tu i nadalje izostavljeni. Zadatak upravljanja je dovesti stanje sistema (1) iz bilo kog početnog stanja u koordinatni početak, pod dejstvom poremećaja  $d$ . Tehnika KR je adekvatan pristup u rešavanju ovog problema.

Neka kliza promenljiva  $g \in \mathbb{R}$  je definisana kao

$$g = cx, c \in \mathbb{R}^{1 \times n}. \quad (2)$$

*Definicija 1*, [15]: Klizna promenljiva  $g$  sistema (1) ima relativni red  $r$  u odnosu na upravljanje ako važi  $cA^i b = 0$  za  $i = 0, 1, \dots, r-2$  i  $cA^{r-1} b \neq 0$ .

Dati uslovi daju da se upravljanje pojavljuje tek u  $r$ -tom izvodu  $g$ , tj. u  $g^{(r)}$ . Korišćenjem gornjih uslova, za  $r$ -ti izvod klizne promenljive se dobija

$$g^{(r)} = cA^r x + cA^{(r-1)} b(u + d). \quad (3)$$

Kod sistema sa relativnim redom  $r > 1$ , KRVR se moraju primeniti.

*Definicija 2*, [6]: Kretanje sistema (1), (2) u potprostoru definisanog sa

$$g = \dot{g} = \ddot{g} = \dots = g^{(r-1)} = 0 \quad (4)$$

se naziva KR  $r$ -tog reda.

Pokazano je u [8] da upravljanje u sistemu (1), (2) koje obezbeđuje da se za konačno vreme ostvari uslov (4) mora biti diskontinualno, barem na skupu (4). Štaviše, dinamika u KRVR je  $(n-r)$ -tog reda [9]. Ukoliko je adekvatnim izborom  $c$  ova dinamika stabilna, trajektorija sistema asimptotski konvergira duž (4) u koordinatni početak ( $x \rightarrow 0$  za  $t \rightarrow \infty$ ), uprkos dejstvu poremećaja koji zadovoljava uslove poklapanja.

Ako se upravljanje u sistemu (1), (2) formira kao u [9]

$$u = -(cA^{r-1}b)^{-1}[cA^r x + \gamma(\xi)], \quad \xi = (g, \dot{g}, \dots, g^{(r-1)}), \quad (5)$$

$r$ -ti izvod po vremenu od  $g$  postaje

$$g^{(r)} = -\gamma(\xi) + cA^{(r-1)}bd. \quad (6)$$

Levant je predložio u [8] skup kvazi-kontinualnih funkcija  $\gamma(\xi)$  za uspostavljanje KR  $r$ -tog reda za nelinearne sisteme sa skalarnim upravljanjem. Kompleksnost ovih funkcija raste sa porastom reda  $r$ , dok se četering redukuje. Ove funkcije se lako mogu primeniti za linearni slučaj (6).

*Definicija 3*: Sistem upravljanja (1) se stabilizuje za konačno vreme odgovarajućim upravljanjem ukoliko vektor stanja iz bilo kog nenultog početnog stanja dođe u koordinatni početak i nadalje tu ostane, tj.  $x(0) \neq 0$ ,  $x(t) = 0$  za  $t \geq t_f > 0$ .

KRVR u određenim slučajevima mogu ostvariti stabilizaciju sistema u konačnom vremenu. Naime, ukoliko je relativni red klizne promenljive  $g$  jednak dimenziji sistema ( $r = n$ ), dinamika sistema u KRVR je nultog reda [9]. To znači da KR  $n$ -tog reda, koji nastaje u konačnom vremenu, redukuje red sistema na nulu. Drugim rečima, KR  $n$ -tog reda nastaje za konačno vreme u koordinatnom početku. Međutim, praktična

implementacija KRVR koji je viši od dva ima mnogo poteškoća.

U sistemima sa više ulaza, gde više upravljačkih signala povećavaju upravljačke mogućnosti sistema, ideja anuliranja reda sistema je lakše primenljiva. Međutim, projektovanje multivarijabilnih sistema je komplikovanije. Dakle, zadatak upravljanja u ovom radu je pitanje kako formirati vektor upravljanja primenom tehnike KRVR, koji za konačno vreme anulira red sistema i na taj način obezbeđuje stabilizaciju sistema u konačnom vremenu u kontekstu Definicije 3.

### III. GLAVNI REZULTATI

Dat je kontrolabilni, vremenski kontinualan, multivarijabilni linearni sistem

$$\dot{x} = Ax + Bu + Gd, \quad (7)$$

gde je  $x \in \mathbb{R}^n$  vektor stanja,  $u \in \mathbb{R}^m$  je upravljanje i  $d \in \mathbb{R}^l$  je poremećaj.  $A$ ,  $B$  i  $G$  su konstantne matrice odgovarajućih dimenzija. Neka je  $B$  punog ranga, tj.  $\text{rank}(B) = m$ , i poremećaj zadovoljava uslove poklapanja  $\text{rank}[B|G] = \text{rank}(B)$ , [4]. To znači da se  $G$  može izraziti kao  $G = BG_0$ , gde  $G_0$  ima odgovarajuće dimenzije.

U opštem slučaju red sistema nije jednak celobrojnom umnošku broju ulaza. Tada se  $n$  može napisati kao  $n = p + qm$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $p < m$ . Da bi se anulirao red sistema u KR  $r$ -tog reda, potrebno je da važi  $n = rm$ . To znači da je u posmatranom opštem slučaju potrebno proširiti sistem do dimenzije  $n_e = (q+1)m = rm$ , formiranjem dodatnih  $m-p$  stanja. Jedan način je da se uvedu fiktivna stanja kao u [14].

U ovom radu je predložen drugačiji pristup koji se bazira na realnom proširenju sistema. Naime, potrebni red sistema  $n_e$  se može dobiti uvođenjem  $m-p$  integratora na nekim ulazima sistema, čiji izlazi predstavljaju nova stanja. Na ovaj način se dobijaju nekoliko korisnih osobina. Najpre, kontrolabilnost sistema se ne ugrožava i nova stanja su lako dostupna za merenje. Međutim, najznačajnija korist je da  $m-p$  signala regulatora za KRVR, koji obično imaju visokofrekvencijsku diskontinualnu komponentu, sada se filtriraju prolaskom kroz integratore, čim se redukuje četering. Takođe, relativni red sistema se povećava, što pogoduje primeni KRVR. Sa druge strane, može doći da gubitka uslova poklapanja poremećaja sistema (7), što predstavlja negativan efekat.

Pretpostavimo da su integratori postavljeni na prvih  $m-p$  ulaza sistema. Tada se novi vektor upravljanja  $v$ , kao i inicijalni  $u$  mogu dekomponovati kao

$$v = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix}, v_a, u_a \in \mathbb{R}^{m-p}, v_b, u_b \in \mathbb{R}^p, \quad (8)$$

pri čemu važi

$$\begin{aligned} \dot{u}_a &= v_a, \\ u_b &= v_b. \end{aligned} \quad (9)$$

Shodno tome i matrica  $B$  može podeliti kao  $B = [B_a \ B_b]$ ,  $B_a \in \mathbb{R}^{n \times (m-p)}$ ,  $B_b \in \mathbb{R}^{n \times p}$ . Ako se prošireni vektor stanja formira kao  $x_e^T = [x^T \ u_a^T]$ , model proširenog sistema postaje

$$\dot{x}_e = A_e x_e + B_e v + G_e d, \quad (10)$$

gde se matrice novog sistema nalaze kao

$$A_e = \begin{bmatrix} A & B_a \\ 0_{(m-p) \times n} & 0_{(m-p) \times (m-p)} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$B_e = \begin{bmatrix} 0_{n \times (m-p)} & B_b \\ I_{m-p} & 0_{(m-p) \times p} \end{bmatrix}, G_e = \begin{bmatrix} G \\ 0_{(m-p) \times l} \end{bmatrix}.$$

Uslov poklapanja poremećaja u proširenom sistemu (10) je

$$\text{rank}[B_e | G_e] = \text{rank}(B_e). \quad (12)$$

Inicijalna pretpostavka  $\text{rank}[B|G] = \text{rank}(B)$  u opštem slučaju ne garantuje važenje (12). U velikom broju slučajeva je moguće očuvati svojstvo poklapanja inicijalnog sistema (7) ukoliko se izbegava postavljanje integratora na ulaznim kanalima gde deluju poremećaji. Preuređenjem vektora stanja se u tom slučaju može naći model (10) u kome važe uslovi (12). Čak i ako su narušeni uslovi poklapanja zbog integratora na ulaznim kanalima gde deluju poremećaji, integratori eliminišu konstantne i sporo promenljive poremećaje.

Vektor upravljanja sa  $m$  komponenti uslovljava postojanje  $m$  promenljivih klizanja. Vektor  $g = [g_1, g_2, \dots, g_m]^T$  je tada

$$g = Cx_e, C \in \mathbb{R}^{m \times n_e}, C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}, c_i \in \mathbb{R}^{1 \times n_e}, i = 1, \dots, m. \quad (13)$$

Klizne promenljive moraju biti linearno nezavisne, što zahteva  $\text{rank}(C) = m$ . Relativni red kliznog vektora treba biti  $r$  da bi se obrazovao KR  $r$ -tog reda, opisan sa

$$g = \dot{g} = \dots = g^{(r-1)} = 0. \quad (14)$$

Zadatak je stabilizovati sistem (7) za konačno vreme organizovanjem KRVR u proširenom sistmu (10). Za to je potrebno naći odgovarajuću matricu  $C$  i vektor upravljanja  $v$  koji obezbeđuju željeno ponašanje. Naredna teorema daje rešenje za postavljeni zadatak.

*Teorema 1:* Ukoliko u sistemu (7) važe uslovi

$$\text{rank}[B \ AB \ \dots \ A^{r-2}B \ A^{r-1}B_b] = n, \quad (15)$$

tada matrica  $C$  iz (13) koja se formira kao

$$C = [0_{m \times (n-p)} \ I_m]H^{-1}, \quad (16)$$

$$H = [B_e \ A_e B_e \ \dots \ A_e^{r-1} B_e],$$

i vektor upravljanja oblika

$$v = -CA_e^r x_e - \gamma(\xi),$$

$$\gamma(\xi) = \begin{bmatrix} \gamma_1(\xi_1) \\ \gamma_2(\xi_2) \\ \vdots \\ \gamma_m(\xi_m) \end{bmatrix}, \xi_i(g_i, \dot{g}_i, \dots, g_i^{(r-1)}), i = 1, 2, \dots, m, \quad (17)$$

stabilizuju (7) za konačno vreme. Komponente  $\gamma_i(\xi_i)$  vektora  $\gamma(\xi)$  su Levantove kvazi-kontinualne funkcije [8] za formiranje KR  $r$ -tog reda po promenljivoj klizanja  $g_i$ .

*Dokaz:* Da bi se ostvario KR  $r$ -tog reda na potprostoru (14), što anulira red dinamike u KR i daje dosezanje koordinatnog početka za konačno vreme, vektor klizanja (13) mora biti relativnog reda  $r$  u odnosu na upravljanje  $v$ . Značajno bi bilo ostvariti decentralizvano upravljanje u smislu da svaki upravljački signal utiče samo na jednu promenljivu klizanja. Ovi zahtevi se mogu ispuniti adekvatnim izborom  $C$ . Slično Definiciji 1, pokazuje se da se traženi relativni red  $r$  raspregnuto upravljanje ostvaruje ukoliko  $C$  zadovoljava uslove:

$$CA_e^i B_e = 0_m, i = 0, 1, \dots, r-2, \quad (18)$$

$$CA_e^{r-1} B_e = I_m. \quad (19)$$

Ovi uslovi se mogu izraziti u matricnoj formi

$$CH = [0_{m \times (n-p)} \ I_m], \quad (20)$$

gde  $H = [B_e \ A_e B_e \ \dots \ A_e^{r-1} B_e]$  je kvadratna matrica. Korišćenjem (11) u izračunavanju  $H$  se dobija da ova matrica ima blok-dijagonalnu formu

$$H = \begin{bmatrix} 0_{n \times (m-p)} & M \\ I_{m-p} & 0_{(m-p) \times n} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

gde je  $M$   $n$ -dimenzionalna kvadratna matrica oblika

$$M = [B_b \ B_a \ AB_b \ AB_a \ A^2 B_b \ \dots \ A^{r-2} B_a \ A^{r-1} B_b]. \quad (22)$$

Iz (21) se vidi da se inverzna matrica od  $H$  može naći kao

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} 0_{(m-p) \times n} & I_{m-p} \\ M^{-1} & 0_{n \times (m-p)} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

ukoliko je  $\text{rank}(M) = n$ . Rearanžiranjem kolona u  $M$ , ovaj uslov ranga  $M$  postaje (15). Tada se  $C$  nalazi iz (20) kao u (16).

Pod uslovima (18) i (19), ili izborom  $C$  u skladu sa (16), uzastopni izvodi po vremenu vektora klizanja (13) se dobijaju na osnovu (10) kao

$$g^{(i)} = CA_e^i x_e + f_i, f_i = \sum_{j=0}^{i-1} CA_e^{i-1-j} G_e d^{(j)}, \quad (24)$$

$$i = 0, 1, \dots, r-1,$$

$$g^{(r)} = CA_e^r x_e + v + f_r, f_r = \sum_{j=0}^{r-1} CA_e^{r-1-j} G_e d^{(j)}. \quad (25)$$

Očigledno je da se upravljanje  $v$  javlja tek u  $g^{(r)}$ . Vektorska jednačina (25) se može iskazati kroz skup skalarnih jednačina

$$g_i^{(r)} = c_i A_e^r x_e + v_i + f_{ri}, i = 1, 2, \dots, m. \quad (26)$$

Poređenjem (26) sa slučajem sistema sa skalarnim upravljanjem (3) i (6), upravljanje u (26) treba dati

$$g_i^{(r)} = -\gamma_i(\xi_i) + f_{ri}, i = 1, 2, \dots, m, \quad (27)$$

gde  $\gamma_i(\xi_i)$  su Levantove kvazi-kontinualne funkcije [8] koje ostvaruju KR  $r$ -tog reda u odnosu na  $g_i$ . Na osnovu desnih strana jednačina (26) i (27),  $v_i$  se može naći kao

$$v_i = c_i A_e^r x_e - \gamma_i(\xi_i), i = 1, 2, \dots, m. \quad (28)$$

Dobijene komponente upravljanja daju vektor  $v$  u obliku (17), što kompletira dokaz. ■

Dolazak u konačnom vremenu je garantovan, ali je dužina tog vremena nepredvidiva u multivarijabilnim sistemima. Treba primetiti da upravljanje (17) zahteva izvode promenljivih klizanja do  $(r-1)$ -og reda, što može zahtevati primenu diferencijatora. U tom slučaju se može očekivati pojačanje četeringa što je u svakom slučaju neželjeni efekat.

*Napomena 1:* Ukoliko uslovi poklapanja (12) važe u proširenom sistemu (10), izvodi promenljivih klizanja (24) i (25) tada postaju

$$g^{(i)} = CA_e^i x_e, i = 0, 1, \dots, r-1, \quad (29)$$

$$g^{(r)} = CA_e^r x_e + v + G_{e0} d. \quad (30)$$

*Dokaz:* Ako je uslov (12) ispunjen onda se matrica  $G_e$  može izraziti kao  $G_e = B_e G_{e0}$ , gde  $G_{e0}$  ima odgovarajuću dimenziju. Ubacivanjem ovog izraza za  $G_e$  u (24) i primenom uslova (18) dobija se (29). Na sličan način se dobija (30). ■

Važno je uočiti mogućnost koja se javlja kada su uslovi poklapanja ispunjeni, a to je da se izvodi promenljivih klizanja mogu izračunati korišćenjem (29) uz poznavanje samo vektora stanja, te primena diferencijatora nije potrebna. Takođe, KRVR u podprostoru (14) obezbeđuje dosezanje koordinatnog početka za konačno vreme.

U slučaju kada se uslovi poklapanja izgube, izvodi promenljivih klizanja se ne mogu odrediti iz (24) zbog

prisustva člana koji predstavlja nepoznati poremećaj, pa se diferencijatori moraju upotrebiti. KRVR nastaje u okolini (14), što za posledicu ima doseganje male ograničene okoline koordinatnog početka za konačno vreme.

*Napomena 2:* Vektor  $g$  definisan sa (13), gde je  $C$  određeno iz (16), ne zavisi od izlaza ubačenih integratora, tj. od novih stanja  $u_a$ .

*Dokaz:* Korišćenjem  $H^{-1}$  oblika (23) za izračunavanje  $C$  iz (16), dobija se

$$C = [0_{m \times (n-p)} \quad I_m] \cdot \begin{bmatrix} 0_{(m-p) \times n} & I_{m-p} \\ M^{-1} & 0_{n \times (m-p)} \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Pošto je  $n - p < m - p$  i  $m < n$ , gornji matricni proizvod daje

$$C = [C_1 \quad 0_{m \times (m-p)}], \quad (32)$$

gde je  $C_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Tada na osnovu (13) se dobija

$$g = Cx_e = [C_1 \quad 0_{m \times (m-p)}] \cdot \begin{bmatrix} x \\ u_a \end{bmatrix} = C_1 x. \quad (33)$$

To znači da KRVR u potprostoru (14) garantuje jedino  $x = 0$ . Preostali deo  $u_a$  vektora stanja  $x_e$  može doseći drugu vrednost u zavisnosti od poremećaja. Ova vrednost se može naći iz ustaljenog stanja sistema (7). Nakon doseganja koordinatnog početka za konačno vreme  $t_f > 0$  dobija se  $x(t) = \dot{x}(t) = 0$  za  $t \geq t_f$ , što iz (7) daje

$$Bu(t) + Gd(t) = 0, t \geq t_f > 0. \quad (34)$$

Pošto matrica  $B$  ima puni rang, vektor upravljanja se dobija kao

$$u(t) = -B^+ Gd(t), t \geq t_f > 0, \quad (35)$$

odakle se može naći  $u_a$ .  $B^+$  je pseudoinverzija matrice  $B$ .

Funkcije  $\gamma_i(\xi_i)$  koje garantuju KRVR u konačnom vremenu se mogu izabrati kao nelinearne funkcije date u [7,8]. Na primer, funkcije  $\gamma_i(\xi_i)$  za  $r = 1,2,3$  su respektivno date kao

$$\gamma_i(\xi_i) = \alpha \frac{g_i}{|g_i|}, \quad (36)$$

$$\gamma_i(\xi_i) = \alpha \frac{\dot{g}_i + \beta_1 |g_i|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(g_i)}{|\dot{g}_i + \beta_1 |g_i|^{\frac{1}{2}}|}, \quad (37)$$

$$\gamma_i(\xi_i) = \alpha \frac{\ddot{g}_i + \beta_2 (|\dot{g}_i + \beta_1 |g_i|^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} (\dot{g}_i + \beta_1 |g_i|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(g_i))}{|\ddot{g}_i + \beta_2 (|\dot{g}_i + \beta_1 |g_i|^{\frac{2}{3}})|}, \quad (38)$$

gde su  $\alpha, \beta_1, \beta_2 > 0$  izabrani da budu dovoljno veliki.

#### IV. ILUSTRATIVNI PRIMER I SIMULACIONI REZULTATI

Procedura projektovanja i performanse prodloženog upravljačkog sistema su demonstrirane na numeričkom primeru sistema oblika (7). Izabran je sistem petog reda sa tri ulaza, čije su matrice date sa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.132 & 0 & -1 \\ 0 & -0.054 & -0.1721 & 0 & 0.0705 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.0485 & 0 & -0.856 & -1.013 \\ 0 & -0.2908 & 0 & 1.0532 & -0.686 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -0.12 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4.419 & 0 & -1.656 \\ -1.575 & 0 & -0.0732 \end{bmatrix}.$$

Kako je  $n = 5$  i  $m = 3$ , sledi  $p = 2$ ,  $q = 1$  i broj nedostajućih stanja je  $m - p = 1$ . Odatle sledi da jedan integrator treba ubaciti na prvi ulaz sistema, čiji izlaz  $u_a = u_1$  je nova

promenljiva stanja. Matrice proširenog sistema (10) se nalaze korišćenjem (11). Pošto je  $r = 2$ , KR drugog-reda treba uspostaviti da bi se anulirao red sistema. Matrice sistema  $A$  i  $B$  zadovoljavaju uslov (15) te se  $C$  nalazi iz (16) kao

$$C = \begin{bmatrix} 0.1896 & 0.8005 & -0.4002 & -0.0169 & 0.3822 & 0 \\ 0.1867 & -1.0868 & 0.5434 & 0.0221 & -0.5004 & 0 \\ 0.1176 & 0.8085 & -0.4042 & 0.0082 & -0.1853 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poslednja kolona matrice je jednaka nuli, u skladu sa Napomenom 2, pa vektor klizanja (13) ne zavisi od stanja  $u_1$ .

Upravljanje je realizovano na osnovu (17), sa nelinearnim delom (37) za KR drugog-reda

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1(g_1, \dot{g}_1) \\ \gamma_2(g_2, \dot{g}_2) \\ \gamma_3(g_3, \dot{g}_3) \end{bmatrix}, \gamma_i = \alpha_i \frac{\dot{g}_i + \beta_i |g_i|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(g_i)}{|\dot{g}_i + \beta_i |g_i|^{\frac{1}{2}}|}, i = 1,2,3.$$

Neka je inicijalno stanje  $x_0 = [10 \quad -5 \quad 0 \quad -10 \quad 5]^T$  i neka na sistem deluje vektor spoljnog poremećaja

$$d(t) = \begin{bmatrix} 0.5 \sin(4\pi t) \\ \sin(\frac{2\pi}{3} t) \\ 2h(t-3) \end{bmatrix},$$

gde je  $h(t)$  Hevisajdova odskočna funkcija. Poremećaj se sastoji od harmonijskih komponenti niže i više učestanosti, kao i od konstantnog dela. Simulaciono su ispitana dva slučaja u zavisnosti od uslova poklapanja u proširenom sistemu.

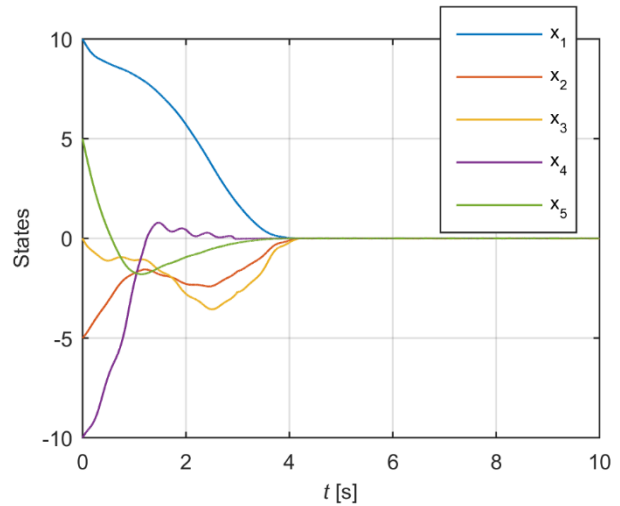
Prvo se posmatra slučaj kada uslovi poklapanja važe i u proširenom sistemu. Neka poremećaj deluje na sistem preko matrice

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -4.968 & 1.656 & 1.656 \\ -0.2156 & 0.0732 & 0.0732 \end{bmatrix}.$$

Matrice  $G$  i  $G_e$  zadovoljavaju uslove poklapanja sistema (7) i (10), respektivno. Pojačanja regulatora su izabrana kao

$$\alpha = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3] = [5 \quad 6 \quad 6],$$

$$\beta = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3] = [0.8 \quad 0.8 \quad 0.8].$$

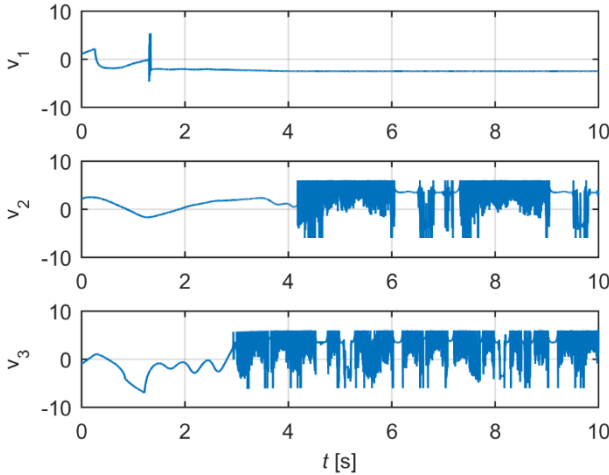


Sl. 1. Promenljive stanja

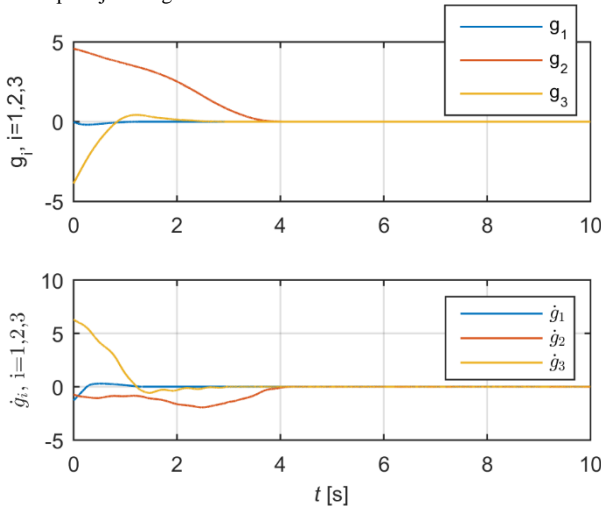
Izvodi  $\dot{g}_i$ ,  $i = 1,2,3$ , potrebni za formiranje upravljanja, su dobijeni korišćenjem (29). Sl. 1. pokazuje da se promenljive stanja anuliraju uprkos poremećajima. Poremećaji (naročito visokofrekventni) utiču na stanja u fazi doseganja KRVR. Analiza je pokazala da je stanje sistema došlo u koordinatni

početak za konačno vreme  $t_f = 4.2$  s. Upravljački signali koji ostvaruju takvo kretanje sistema su dati na Sl. 2, odakle se vidi da po nastanku KRVR imaju diskontinualnu prirodu.

Promenljive klizanja  $g_1, g_2, g_3$  i izvodi  $\dot{g}_1, \dot{g}_2, \dot{g}_3$  su prikazani na Sl. 3, odakle se vidi da projektovani regulator anulira u konačnom vremenu ove signale. To znači da regulator (17) uspostavlja KRVR u potprostoru (14) za konačno vreme. Pošto KRVR nastaje u koordinatnom početku, red sistema je anuliran i stabilizacija u konačnom vremenu je ostvarena.



Sl. 2. Upravljački signali.



Sl. 3. Promenljive klizanja i njihovi izvodi po vremenu.

Drugi slučaj je da se prilikom proširenja sistema izgubi svojstvo poklapanja poremećaja. Neka je ulazna matrica poremećaja data sa

$$G = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0.88 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -0.549 & 1.656 & 1.656 \\ 1.3554 & 0.0732 & 0.0732 \end{bmatrix}$$

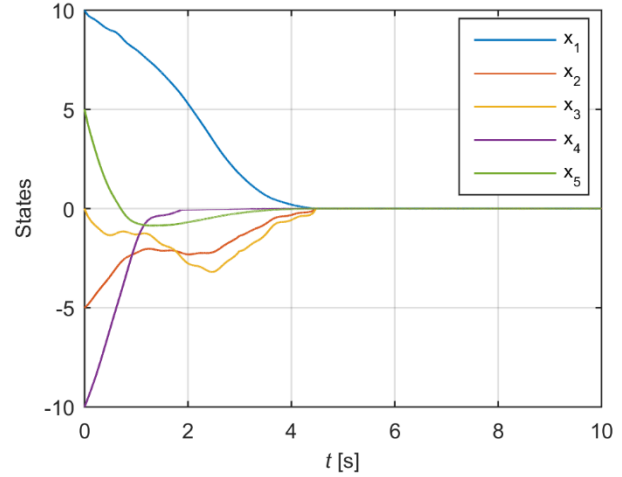
Ova matrica ispunjava uslove poklapanja u sistemu (7), ali proširena matrica  $G_e$  ne zadovoljava uslove (12) u sistemu (10). U ovom slučaju pojačanja regulatora su izabrana kao

$$\alpha = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3] = [8 \quad 8 \quad 8],$$

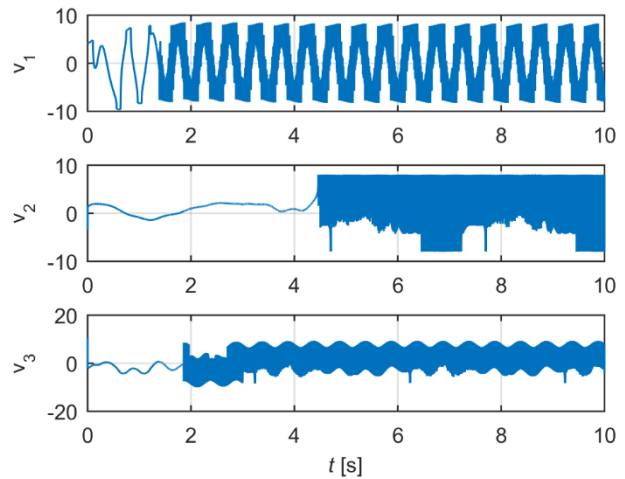
$$\beta = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3] = [0.8 \quad 0.8 \quad 0.8].$$

Zbog prisustva poremećaja u (24), izvodi promenljivih klizanja se moraju dobiti diferencijatorima. Promenljive stanja

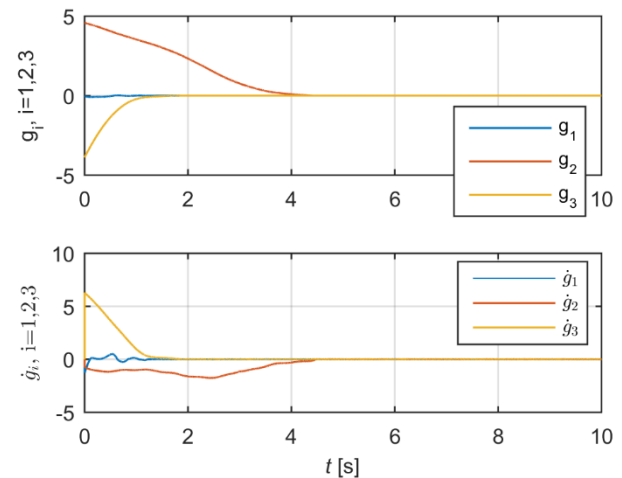
u ovom slučaju su date na Sl. 4. Dobijeni odzivi su veoma slični onima sa Sl. 1. Na osnovu analize podataka se može zaključiti da promenljive stanja ulaze u beznačajno širu okolinu koordinatnog početka za konačno vreme  $t_f = 4.5$  s. Upravljački signali, prikazani na Sl. 5, imaju više četeringa u odnosu na prethodni slučaj. Međutim, treba imati u vidu da upravljanje  $v_1$  se filtrira prolaskom kroz ubačeni integrator.



Sl. 4. Promenljive stanja.



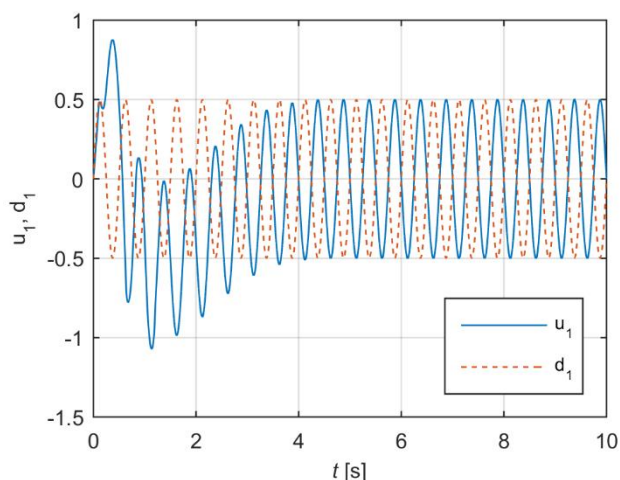
Sl. 5. Upravljački signali.



Sl. 6. Promenljive klizanja i njihovi izvodi po vremenu.



Promenljive klizanja i njihovi izvodi su prikazani na Sl. 6. Teoretski treba očekivati da KR drugog-reda nastane za konačno vreme u maloj ograničenoj okolini (14). Međutim, primetna degradacija performansi nije prisutna u simulacionim rezultatima.



Sl. 7. Ulaz sistema  $u_1$  i  $d_1$  komponenta poremećaja.

Interesantno je videti odziv signala  $u_1$ , koji je pravi prvi ulaz sistema. Na osnovu Napomene 2 i (35) lako je naći da je  $u_1(t) = -d_1(t)$  za  $t \geq t_f$ , što je i simulaciono potvrđeno na Sl. 7. Očigledno je da izlaz ubačenog integratora teži da poništi komponentu poremećaja koja deluje u tom upravljačkom kanalu. Ta komponenta je zapravo onaj deo poremećaja koji ne zadovoljava uslove poklapanja, pa se na ovaj način upravo kompenzuju ovakvi poremećaji.

## V. ZAKLJUČAK

Predloženi pristup upravljanja sugeriše primenu KRVR sa ciljem anuliranja reda multivarijabilnog linearnog sistema, čime se ostvaruje stabilizacija sistema za konačno vreme. Da bi se implementirala predložena ideja, u nekim slučajevima je potrebno proširiti sistem uvođenjem potrebnog broja integratora na ulaze sistema. Takvo proširenje očuvava kontrolabilnost sistema ali može ugroziti uslove poklapanja poremećaja. Međutim, ubačeni integratori teže da ponište delove poremećaja koji ne zadovoljavaju uslove poklapanja. U tu svrhu je data i metoda projektovanja klizne površi i predložen je adekvatni zakon upravljanja.

Prikazani simulacioni rezultati su potvrdili teoretski predviđeno ponašanje. Pokazano je da upravnje na bazi KRVR garantuje stabilizaciju sistema u konačnom vremenu, uprkos dejstvu poremećaja.

## LITERATURA

[1] С. В. Емельянов, "Способ получения сложных законов регулирования с использованием лишь сигнала ошибки или

регулируемой координаты и ее первой производной," *Автоматика и телемеханика*, no 10, стр.873-885, 1957.

- [2] V. I. Utkin, "Variable structure systems with sliding mode," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 22, no. 2, pp. 212-222, 1977.
- [3] С. В. Емельянов, и др., Теори систем с переменной структурой, Наука, Москва, 1970.
- [4] V. I. Utkin, Sliding modes in control and optimization, Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1992.
- [5] B. Draženović, "The invariance conditions in variable structure systems," *Automatika*, vol. 5, no. 3, pp. 287-295, 1969.
- [6] A. Levant, "Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control," *Int. J. Contr.*, vol. 58, no. 6, pp. 1247-1163, 1993.
- [7] A. Levant, "Homogeneity approach to higher-order sliding mode design" *Automatika*, vol. 41, pp. 823-830, 2005.
- [8] A. Levant, "Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 50, no. 11, pp. 1812-1816, 2005.
- [9] V.I. Utkin, "Discussion aspects of higher-order sliding modes," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 61, no. 3, pp. 829-833, 2016.
- [10] I. Castillo, F. Castaños, L. Fridman, "Sliding Surface Design for Higher-Order Sliding Modes," in L. Fridman, J.P. Barbot, F. Plestan (eds.), *Recent Trends in Sliding Mode Control*, IET, 2016
- [11] A. Levant, "MIMO 2-sliding control design," Proc. European Control Conference ECC, Cambridge, UK, pp. 916-921, 1-4 Sept., 2003.
- [12] G. Bartolini, A. Ferrara, E. Usai, V. I. Utkin, "On multi input chattering free second order sliding mode control," *IEEE Transactions on automatic Control*, vol. 45, no. 9, pp. 1711-1717, Sept., 2000.
- [13] A. Levant, M. Livne, "Uncertain disturbances' attenuation by homogeneous MIMO sliding mode control and its discretization," *IET Control Theory & Applications*, vol. 9, no. 4, pp. 515-525, 2015.
- [14] B. Peruničić-Draženović, Č. Milosavljević, B. Veselić, S. Huseinbegović, "New VSC based finite time control of LTI Systems," Proc. 14. Int. VSS Workshop, Nanjing, China, 1-4 June, 2016.
- [15] D. Hernandez, F. Castanos, L. Fridman, "Pole-placement in higher-order sliding-mode control," Proc. 19th IFAC World Congress, pp. 1386-1391, 2014.

## ABSTRACT

The paper considers finite time stabilization of continuous-time (CT) controllable linear time invariant (LTI) multi-input systems. The presented approach uses higher order sliding mode control (HOSMC) to reduce the system order to zero and thus providing the system states to reach the origin in finite time, regardless of disturbances. The method requires the system order to be multiple of the number of inputs. In systems where this is not the case, the required number of additional states are introduced by placing the same number of integrators at the system inputs. For such augmented system, an appropriate sliding manifold is designed and related reaching control is suggested. Properties of the proposed control system are demonstrated on a simulation example.

## Contribution to the Higher Order Sliding Modes Implementation in Finite Time System Stabilization

Boban Veselić, Branislava Draženović, Čedomir Milosavljević and Senad Huseinbegović