

# Analitički postupak određivanja funkcije gustine verovatnoće i funkcije raspodele verovatnoće greške u mobilnom telekomunikacionom kanalu

Nemanja Zdravković, *Student Member, IEEE*, Zvezdan Marjanović i Goran T. Đorđević, *Member, IEEE*

**Apstrakt**—U radu su izvedeni analitički izrazi za funkciju gustine verovatnoće i funkciju raspodele verovatnoće greške pri detekciji binarnog fazno-modulisiranog signala. Signal se prostire kroz kanal sa kompozitnim fedingom. Izveden je i izraz za nivo pouzdanosti procene verovatnoće greške. Analizirani su uticaji parametara fedinga i efekta senke na napred pomenute veličine. Rezultati su od koristi u procesu simulacija na računaru za procenu potrebnog vremena za određivanje verovatnoće greške za zadate uslove u kanalu.

**Ključne reči**—Verovatnoća greške; funkcija gustine verovatnoće; funkcija raspodele; interval pouzdanosti; kanal sa kompozitnim fedingom.

## I. UVOD

VEROVATNOĆA greške je bitan parametar na osnovu koga se procenjuje kvalitet prenosa informacija u telekomunikacionom sistemu. Ova veličina može se odrediti na različite načine: analitičkim pristupom, simulacijama na računaru i eksperimentalnim merenjima. Ukoliko se u telekomunikacionom sistemu primenjuju savremeni metodi obrade signala (modulacioni i demodulacioni postupci, zaštitno, entropijsko i kriptno kodovanje i dekodovanje, itd.) simulacioni postupci dobijaju na značaju, pogotovo ako se uzme u obzir napredak u oblasti računarske tehnike i razvoj brzih procesora. Monte Karlo simulacije su najrasprostranjeniji način procene verovatnoće greške [1-3].

Prilikom Monte Karlo simulacija potrebno je razviti efikasne postupke generisanja odmeraka slučajnih procesa koji imaju zadate statističke karakteristike prve i druge vrste. Dakle, nije dovoljno samo voditi računa o generisanju odmeraka slučajnog procesa sa određenom funkcijom gustine verovatnoće, već treba voditi računa i o autokorelacionoj funkciji, kao i o srednjem broju preseka tog procesa sa određenim nivoom u jedinici vremena. Jedan od bitnih parametara Monte Karlo simulacija jeste potrebno vreme za procenu verovatnoće greške. Kada je u pitanju kanal sa

konstantnim parametrima, tj. kanal u kome je prisutan signal čija je amplituda konstantna u vremenu, i prisutan je samo termički šum, potreban broj odmeraka za procenu određene vrednosti verovatnoće greške za zadati interval pouzdanosti može se odrediti na osnovu [1], [2].

Međutim, ako nije u pitanju kanal sa konstantnim parametrima, kao što je, recimo, kanal sa fedingom, situacija se drastično komplikuje, tako da rezultati iz [1], [2] nisu primenjivi na ovaj slučaj. Potrebno vreme procene verovatnoće greške svakako se povećava, jer statističke promene anvelope signala imaju značajnu ulogu. Zbog toga je u [4]-[6] razmatran ovaj problem i pokušano je da se odredi potrebno vreme procene verovatnoće greške u kanalima sa višepropagacionim fedingom, koji je modelovan pomoću Rejljeve i Nakagami- $m$  raspodele.

U slučaju kada se u kanalu istovremeno javljaju višepropagacioni feding i efekat senke [7]-[9], situacija se dodatno usložnjava zbog prisustva efekta senke. Zbog toga je naš cilj da izvedemo analitičke izraze za funkciju gustine verovatnoće i funkciju raspodele verovatnoće greške pri detekciji binarnih fazno modulisanih signala u kanalu sa kompozitnim fedingom. Kompozitni feding je modelovan pomoću generalizovane  $K$  raspodele. Drugim rečima, višepropagacioni feding je modelovan pomoću Nakagami- $m$  raspodele, a efekat senke pomoću log-normalne, odnosno ekvivalentne Gama raspodele. Za ovakav propagacioni scenario određuje se i interval pouzdanosti.

## II. MODEL SISTEMA

U kanalu sa kompozitnim fedingom, funkcija gustine verovatnoće (PDF – *probability density function*) odnosa snaga signala i šuma ima sledeći oblik [8]

$$p_{\gamma}(\gamma) = \frac{2}{\Gamma(m)\Gamma(m_s)} \gamma^{\frac{m+m_s}{2}-1} \left(\frac{mm_s}{\bar{\gamma}}\right)^{\frac{m+m_s}{2}}, \quad (1)$$
$$\times K_{m_s-m} \left( 2\sqrt{\frac{\gamma mm_s}{\bar{\gamma}}} \right)$$

gde su  $m$  i  $m_s$  parametri fedinga i efekta senke, respektivno,  $\Gamma(\cdot)$  je Gama funkcija,  $K_{\nu}(\cdot)$  je modifikovana Beselova funkcija  $\nu$ -tog reda druge vrste, a  $\bar{\gamma}$  je odnos srednjih snaga

Nemanja Zdravković – Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu, A. Medvedeva 14, 18000 Niš, Srbija (e-mail: nemanja.zdravkovic@elfak.ni.ac.rs).

Zvezdan Marjanović – Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu, A. Medvedeva 14, 18000 Niš, Srbija (e-mail: zvezdan.marjanovic@elfak.ni.ac.rs).

Goran T. Đorđević – Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu, A. Medvedeva 14, 18000 Niš, Srbija (e-mail: goran@elfak.ni.ac.rs).

signala i šuma. Za modulacije kao što su BPSK, M-PSK i M-QAM, verovatnoća greške po simbolu  $P_e$  može se aproksimativno ili tačno napisati u obliku

$$P_e = a \times \operatorname{erfc}(\sqrt{b\gamma}), \quad (2)$$

gde je  $\operatorname{erfc}(\cdot)$  komplementarna funkcija greške, a  $a$  i  $b$  parametri modulacije. Kako je  $\gamma$  slučajna promenljiva, iz (2) se može primetiti da je i  $P_e$  slučajna promenljiva, te se može naći PDF verovatnoće greške sledećom transformacijom

$$p_{P_e}(P_e) = \frac{p_\gamma(\gamma)}{\left| \frac{dP_e}{d\gamma} \right|}, \quad (3)$$

gde je  $\gamma = \frac{1}{b} \left( \operatorname{erfc}^{-1} \left( \frac{P_e}{a} \right) \right)^2$ .

Izvod u (3) može se direktno dobiti u obliku

$$\begin{aligned} \frac{dP_e}{d\gamma} &= \frac{ab \times \exp(-b\gamma)}{\sqrt{\pi b\gamma}} \\ &= \frac{a\sqrt{b} \times \exp\left(-\left(\operatorname{erfc}^{-1}\left(\frac{P_e}{a}\right)\right)^2\right)}{\sqrt{\pi} \left(\operatorname{erfc}^{-1}\left(\frac{P_e}{a}\right)\right)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Kombinovanjem (4) i (3) dobija se PDF verovatnoće greške u obliku

$$\begin{aligned} p_{P_e}(P_e) &= \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(m)\Gamma(m_s)} \left( \frac{mm_s}{\bar{\gamma}} \right)^{\frac{m+m_s}{2}} b^{-\frac{m+m_s}{2}} \\ &\times \left( \operatorname{erfc}^{-1} \left( \frac{P_e}{a} \right) \right)^{m_s+m-1} \exp\left( -\left( \operatorname{erfc}^{-1} \left( \frac{P_e}{a} \right) \right)^2 \right) \cdot (5) \\ &\times K_{m_s-m} \left( 2\sqrt{\frac{mm_s}{b\bar{\gamma}}} \operatorname{erfc}^{-1} \left( \frac{P_e}{a} \right) \right) \end{aligned}$$

Nivo pouzdanosti trenutne verovatnoće greške definiše se pomoću [4]

$$L_c = \int_0^{2\bar{P}_e} p_{P_e}(P_e) dP_e, \quad (6)$$

gde je sa  $\bar{P}_e$  označena srednja verovatnoća greške u kanalu, data pomoću

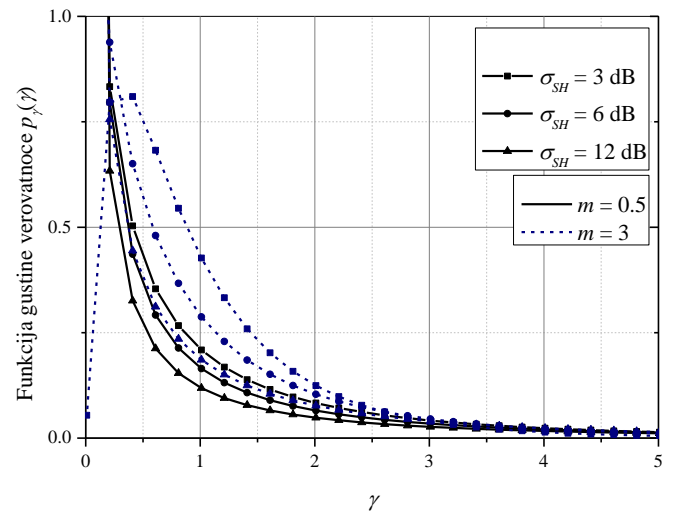
$$\bar{P}_e = \int_0^{0.5} p_{P_e}(P_e) dP_e = \int_0^\infty P_e(\gamma) p_\gamma(\gamma) d\gamma, \quad (7)$$

### III. NUMERIČKI REZULTATI

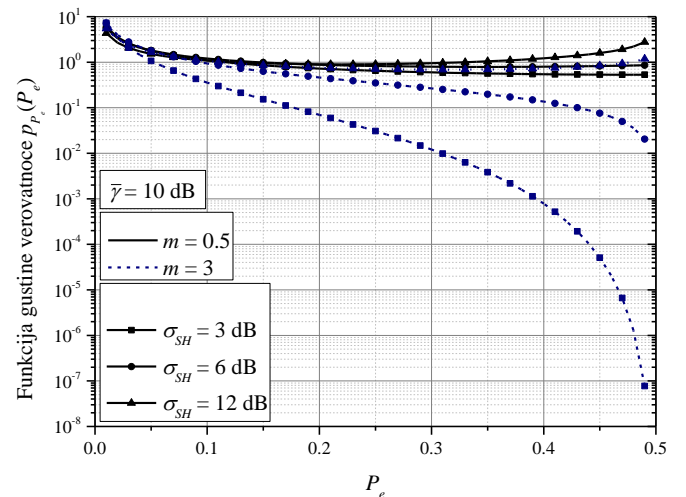
Na osnovu analitičkih izraza izvedenih u prethodnom delu, ovde su prikazani numerički rezultati sa ciljem da se utvrdi uticaj parametara fedinga na napred pomenute veličine.

Na Sl. 1 prikazani su numerički rezultati za funkciju gustine verovatnoće odnosa snaga signala i šuma u kanalu sa kompozitnim fedingom. Parametar fedinga  $m$  ima vrednosti  $m = 0.5$  i  $m = 3$ , što odgovara dubokom i relativno plitkom fedingu, respektivno, dok je parametar efekta senke  $m_s$  određen standardnom devijacijom efekta senke,  $\sigma_{SH}$ . Ove tri vrednosti standardne devijacije odgovaraju situaciji kada je efekat senke slabo izražen, kada je umeren i kada je izrazito prisutan u kanalu, respektivno.

Sl. 2 prikazuje zavisnost PDF verovatnoće greške,  $p_{P_e}(P_e)$ , dok je odnos srednjih snaga signala i šuma  $\bar{\gamma} = 10$  dB. Različite dubine fedinga i efekta senke su uzete u razmatranje.



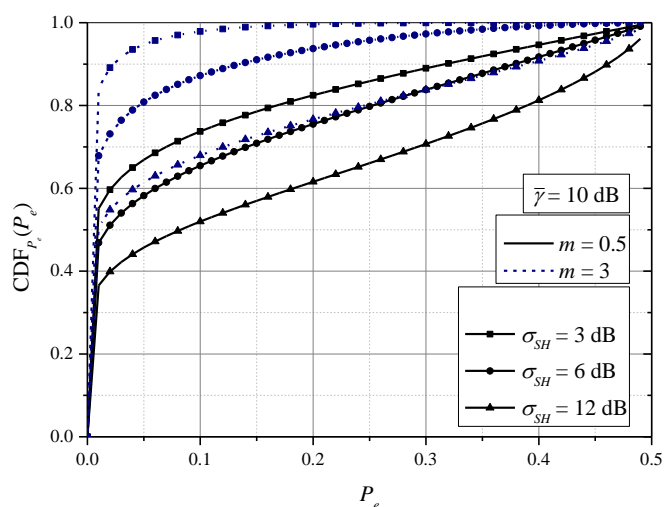
Sl. 1. Funkcija gustine verovatnoće odnosa snaga signala i šuma u kanalu sa kompozitnim fedingom.



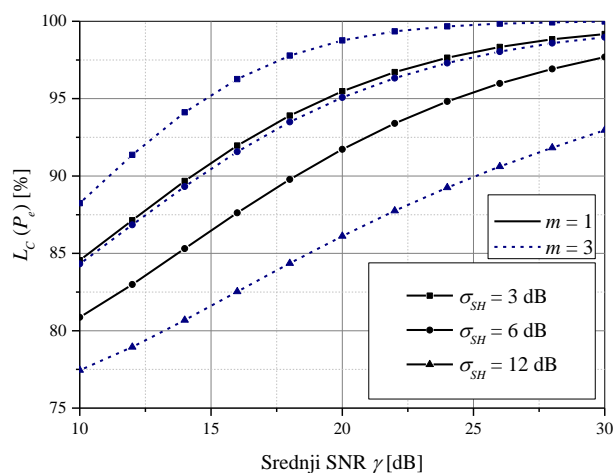
Sl. 2. PDF verovatnoće greške.

Sl. 3 prikazuje funkciju raspodele verovatnoće greške za različite parametre  $m$  i  $\sigma_{SH}$ . Odnos srednjih snaga signala i

šuma je  $\bar{\gamma} = 10$  dB. Treba zapaziti dve stvari. Prvo, kriva funkcije raspodele je strmija ukoliko je parametar višepropagacionog fedinga veći, tj. ukoliko je dubina fedinga manja. I drugo, kriva funkcije raspodele je takođe strmija ukoliko je intezitet efekta senke manji.



Sl. 3. Funkcija raspodele verovatnoće greške.



Sl. 4. Nivo pouzdanosti procene verovatnoće greške.

Nivo pouzdanosti procene verovatnoće greške u zavisnosti odnosa srednjih snaga signala i šuma prikazan je na Sl. 4. Može se primetiti da nivo pouzdanosti procene verovatnoće greške zavisi od parametara fedinga i efekta senke, kao i od odnosa srednjih snaga signala i šuma. Za datu vrednost odnosa srednjih snaga signala i šuma, nivo pouzdanosti je veći ukoliko je parametar višepropagacionog fedinga veći, tj. ukoliko je dubina ovog fedinga manja. Takođe, nivo pouzdanosti je veći i ukoliko je intezitet efekta senke manji tj. ukoliko  $\sigma_{SH}$  ima manju vrednost.

Pri ovome treba imati u vidu da postoji nivo pouzdanosti usled procene, tj. merenja verovatnoće greške, koji je detaljno opisan u [1] i [2] za slučaj kanala sa konstantnim

parametrima, tj. za slučaj kanala sa Gausovim šumom. U kanalu sa promenljivim parametrima, tj. u kanalu sa fedingom javlja se dodatna neizvesnost prilikom procene verovatnoće greške usled prisustva fedinga, ali i efekta senke. Dakle, ukupan nivo pouzdanosti se dodatno smanjuje usled prisustva fedinga i efekta senke. Tek kada krive na Sl. 4 uđu u zasićenje, tj. nivo pouzdanosti bude jednak jedinici, onda se mogu primeniti rezultati iz [1] i [2]. U suprotnom, intervali poverenja procenjeni u ovim referencama se dodatno pogoršavaju u kanalu sa fedingom i efektom senke.

#### IV. ZAKLJUČAK

U radu su prikazani početni rezultati vezani za merenje, tj. procenu verovatnoće greške u kanalu, gde sem višepropagacionog fedinga, postoji i efekat senke. Na osnovu rezultata može se zaključiti da trenutna vrednost verovatnoće greške ima neizvesnost u opsegu praktičnih vrednosti odnosa srednjih snaga signala i šuma, i da ova neizvesnost zavisi od efekta senke. Pri ovome treba imati u vidu da na ovu neizvesnost zbog prirode kanala, treba dodati još i neizvesnost zbog procesa merenja, tj. same procene verovatnoće greške. Kombinovanje ove dve neizvesnosti biće predmet daljih istraživanja.

#### ZAHVALNICA

Rad je realizovan sredstvima projekta TR 32028, „Napredne tehnike efikasnog korišćenja spectra u bežičnim sistemima“, finansiranog od strane Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije, i NORBAS projekta finansiranog od strane Ministarstva inostranih poslova Norveške.

#### LITERATURA

- [1] M. C. Jeruchim, P. Balaban, K. Shanmugan, *Simulation of communication systems: modeling, methodology and techniques*, Springer, Berlin, Germany, 2006.
- [2] M. Jeruchim, “Techniques for estimating the bit error rate in the simulation of digital communication systems,” *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, vol. 2, no. 1, pp. 153–170, Jan. 1984.
- [3] D. Drajić, *Uvod u statističku teoriju telekomunikacija*, Akademska Misao, Beograd, Serbia, 2006.
- [4] I. M. Kostić, “Anatomija verovatnoće greške za kanal sa Nakagamijevim fedingom,” *INFOTEH-JAHORINA*, vol. 6, Ref. B-3, pp. 68–71, mart 2007.
- [5] M. A. Smadi, J. A. Ghaeb, S. O. Al-Jazzar, O. A. Saraereh, “Confidence intervals verification for simulated error rate performance of wireless communication systems,” *Wirel. Pers. Commun.*, vol. 71, pp. 2463–2474, 2013.
- [6] V. Bhaskar, “Distribution and density functions of probability of error over slowly fading channels with diversity combining,” *J Franklin Inst.*, vol. 348, no. 6, pp. 1153–1159, Apr. 2011.
- [7] P. M. Shankar, “Error rates in generalized shadowed fading channels,” *Wirel. Pers. Commun.*, vol. 28, no. 3, pp. 233–238, Dec. 2004.
- [8] I. M. Kostić, “Analytical approach to performance analysis for channel subject to shadowing and fading,” *IEE Proc. Commun.*, vol. 152, no. 6 pp. 821–827, Dec. 2005.
- [9] P. S. Bithas, N. C. Sagias, P. T. Mathiopoulos, G. K. Karagiannidis, A. A. Rontogiannis, “On the performance analysis of digital communications over generalized-K fading channels,” *IEEE Commun. Lett.* vol. 10, no. 5, pp. 353–355, Jun. 2006.

## ABSTRACT

The paper presents the analytical expressions for the probability density function and the distribution function of the probability of error in the detection of the binary phase-shift keying signals. Signal is transmitted through the channel with composite fading. An expression for the level of reliability of the estimation of the probability of error is derived. We analyze the influence of the fading and shadowing parameters on the above-mentioned magnitudes. The results are useful in the process of computer simulation to estimate

the time required for determination of the probability of error for the given conditions in the channel.

### **Analytical Approach for Determination of Probability Density Function and Distribution of Error Probability over Mobile Wireless Channel**

Nemanja Zdravković, Zvezdan Marjanović,  
Goran T. Đorđević